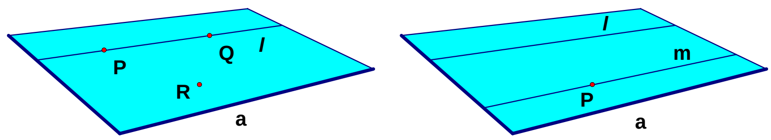
Supplerende materiale til ”Perspektiv med GeoMeter”
Mette Vedelsby & Bjørn Felsager

Matematikken bag perspektivet I

Som udgangspunkt for at diskutere de vigtigste matematiske sætninger bag perspektiv-tegninger vil vi benytte nogle elementære egenskaber for punkter, linjer og planer i rum-geometri.

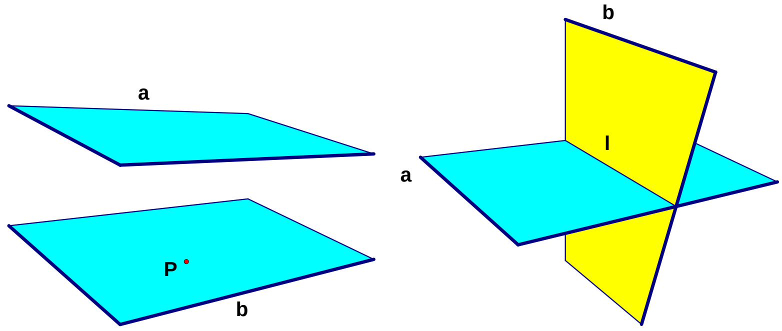


- Gennem to forskellige punkter **P** og **Q** går der netop én ret linje ***l***.

- Gennem tre forskellige punkter **P**, **Q** og **R**, der ikke ligger på den samme rette linje, går der netop én plan **a**.

- Gennem et punkt **P** og en ret linje **l**, der ikke indeholder punktet **P**, går der netop én plan **a**.

- Gennem ét punkt **P**, der ikke ligger på en ret linje ***l***, går der netop én ret linje ***m***, som er parallel med ***l***. Parallellen ***m*** ligger i planen frembragt af punktet **P** og den rette linje ***l***.

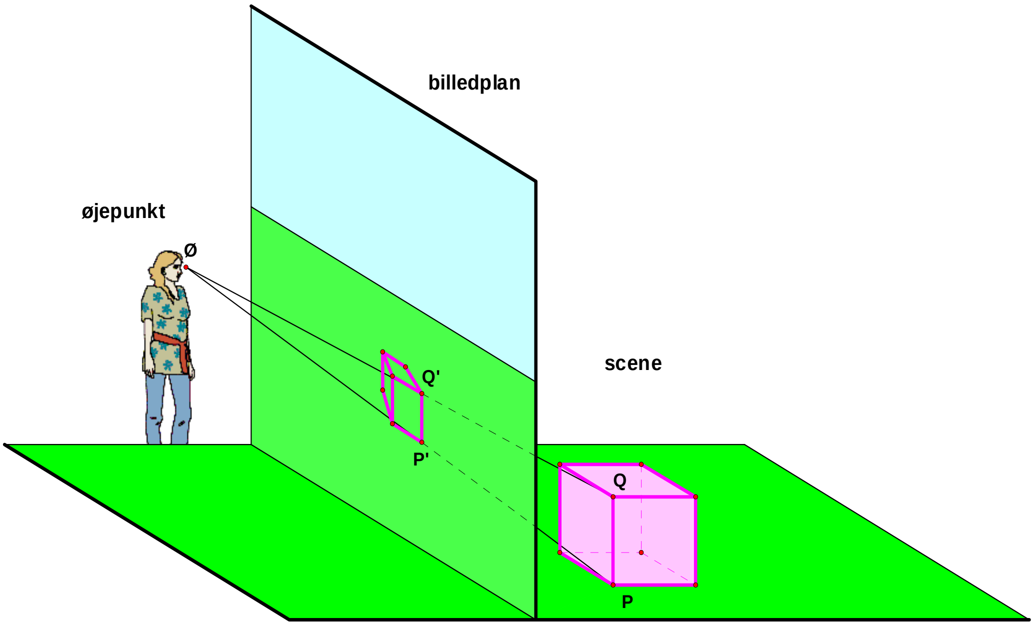


- Gennem et punkt **P** og en plan **a**, der ikke indeholder **P**, går der netop en plan **b**, der er parallel med **a**.

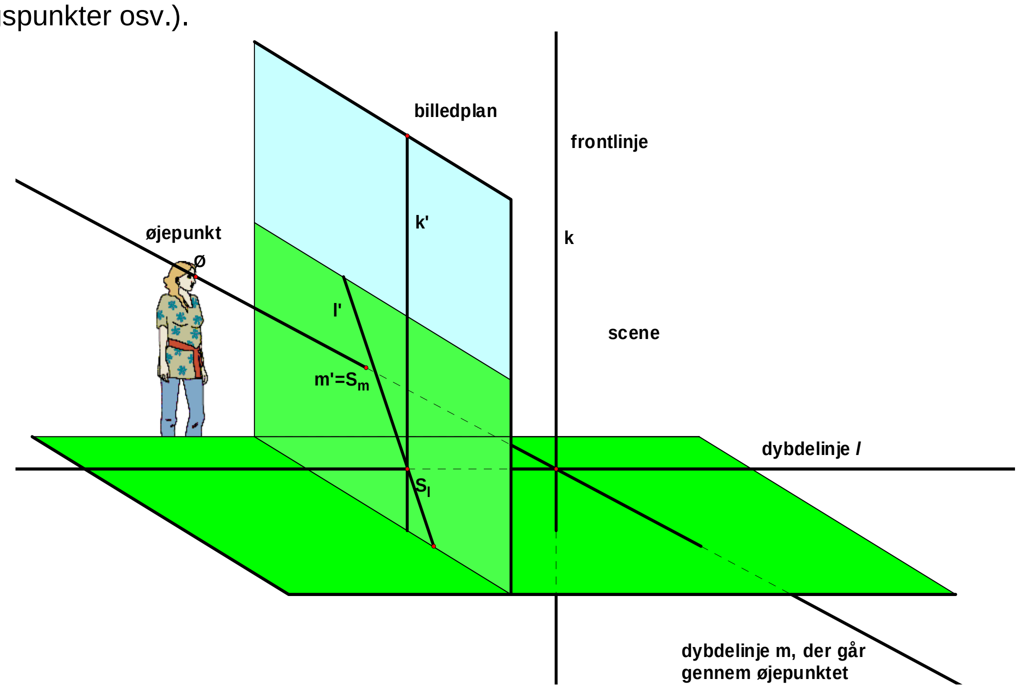
- To forskellige planer **a** og **b** er enten indbyrdes parallelle eller de skærer hinanden i en ret linje ***l***.

En perspektivtegning fremkommer som en centralprojektion fra et øjepunkt **Ø** af en rumlig scene ind på en billedplan **p**. Det er da underforstået at den rumlige scene og øje-punktet **Ø** ligger på hver sin side af billedplanen **p**.

Supplerende materiale til ”Perspektiv med GeoMeter”
Mette Vedelsby & Bjørn Felsager



Billedet af et genstandspunkt **P** fremkommer ved at man forbinder **P** med øjepunktet **Ø** med en ret linje, **synsstrålen**. Denne kan ikke være parallel med billedplanen, da øjepunktet **Ø** og genstandspunktet **P** ligger på hver sin side af billedplanen **p**. Der hvor synsstrålen skærer billedplanen tegnes billedpunktet **P'**. Hvis flere punkter afbildes i det samme billedpunkt er det kun det forreste der tegnes – det forreste punkt skygger for de andre. Hovedkonklusionen er altså at punkter afbildes i punkter (skæringspunkter i skæringspunkter osv.).

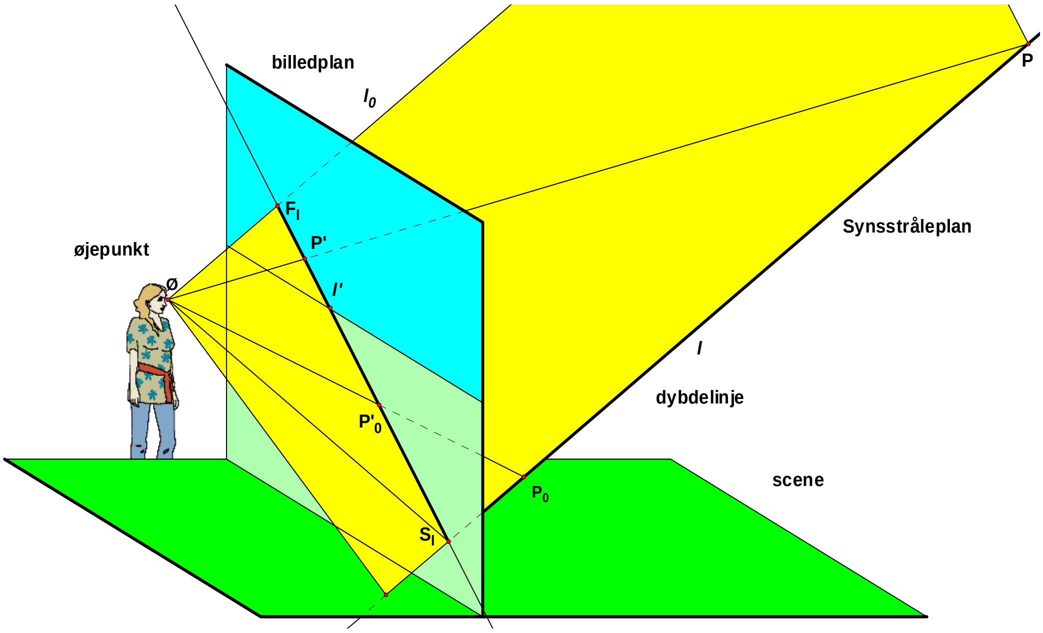


Vi ser dernæst på billedet af en linje hørende til den rumlige scene. Hvis linjen er parallel med billedplanen kaldes den en **frontlinje** og ellers en **dybdelinje**. For dybdelinjer gælder det, at dele af linjen ligger på iagttagerens side af billedplanen. Dybdelinjer skærer billedplanen i et punkt, der kaldes linjens **spor**.

Supplerende materiale til ”Perspektiv med GeoMeter”
Mette Vedelsby & Bjørn Felsager

Hvis en dybdelinje ***m*** går gennem øjepunktet **Ø** afbildes alle linjens punkter i det samme billedpunkt, nemlig linjens spor $\mathbf{S_m}$ i billedplanen. En dybdelinje gennem øjepunktet afbildes altså i et enkelt punkt. I alle andre tilfælde, vil linjen sammen med øjepunktet udspænde en plan, **synsstråleplanen**. Denne kan ikke være parallel med billedplanen, da den indeholder punkter på hver sin side af billedplanen. Den skærer derfor billedplanen i en ret linje ***l'***. Ethvert punkt på linjen ***l*** afbildes derfor i et punkt på linjen ***l'***, hvorfor denne kaldes billedlinjen. I almindelighed afbildes en ret linje altså i en ret linje.

Hvis den rette linje **k** er en frontlinje, dvs. parallel med billedplanen, vil billedlinjen **k'** være parallel med **k**. Afbildningen fra **k** til **k'** er da en ligedannethed (multiplikation) med øjet **Ø** som multiplikationscentrum.



Hvis den rette linje ***l*** er en dybdelinje vil billedlinjen ***l'*** indeholde sporet $\mathbf{S_l}$ i billedplanen, da dette afbildes i sig selv. Vi kan da trække en linje $\mathbf{l_0}$ parallel med ***l*** gennem øjepunktet **Ø**. Den skærer billedplanen i punktet $\mathbf{F_l}$ som kaldes forsvindingspunktet for dybdelinjen. Hvis dybdelinjen ikke indeholder øjepunktet **Ø** vil forsvindingspunktet $\mathbf{F_l}$ være forskelligt fra sporet $\mathbf{S_l}$. Dette vil vi antage i det følgende. Synsstråleplanen frembragt af øjepunktet **Ø** og linjen ***l*** vil da også indeholde parallellen $\mathbf{l_0}$. Men synsstråleplanen skærer netop billedplanen i billedlinjen. Denne går derfor også gennem forsvindingspunktet $\mathbf{F_l}$. Vi har dermed vist perspektivlærens hovedsætning:

- Billedet af en dybdelinje som ikke går gennem øjepunktet **Ø** er den rette linje, der forbinder linjens spor $\mathbf{S_l}$ med linjens forsvindingspunkt $\mathbf{F_l}$. Billedet af en dybdelinje, der går gennem øjepunktet **Ø** er linjens spor i billedplanen.
- Billedet af en frontlinje er en dermed parallel linje i billedplanen.

Vi ser ydermere at linjestykket fra $\mathbf{S_l}$ til $\mathbf{F_l}$ netop er billedpunkterne for den sceniske halvlinje, der udgår fra sporet og ligger på den modsatte side af billedplanen. Rykker man et punkt **P** på linjen længere og længere væk fra billedplanen vil billedpunktet tilsvarende rykke tættere og tættere på forsvindingspunktet. Man siger at forsvindingspunktet er billedpunktet for linjens uendeligt fjerne punkt.

Supplerende materiale til ”Perspektiv med GeoMeter”
Mette Vedelsby & Bjørn Felsager

Da forsvindingspunktet for en ret linje kun afhænger af linjens retning vil enhver anden dermed parallel linje frembringe det samme forsvindingspunkt. Heraf følger:

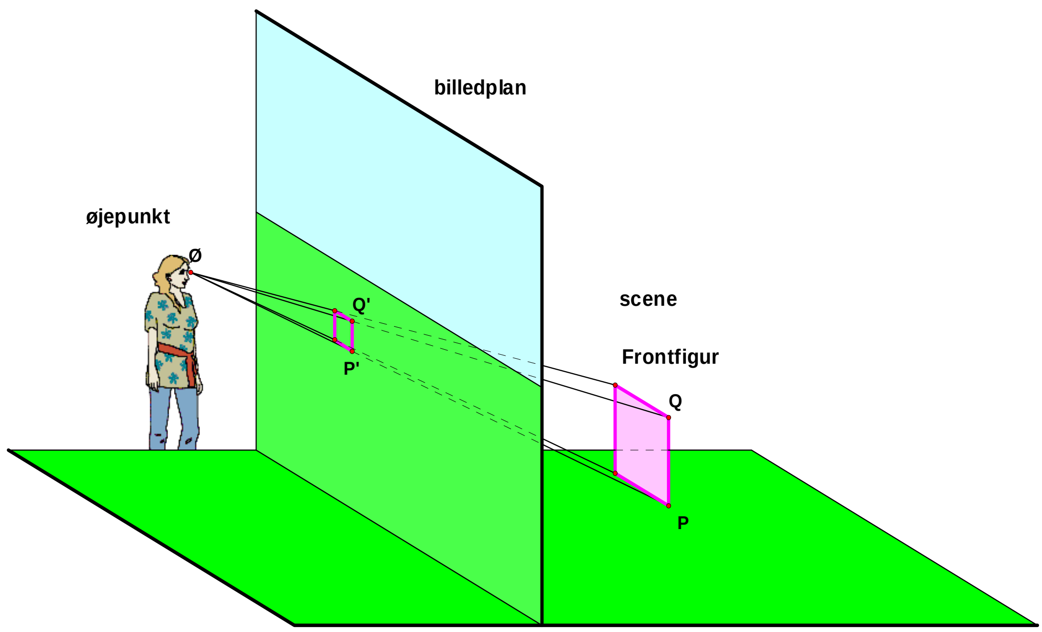
Parallelle linjer i rummet afbildes i linjer, der går gennem det samme forsvindingspunkt.

En ganske særlig rolle spiller billedplanens **normaler**, dvs. de rette linjer, der står vinkelret på billedplanen. Deres forsvindingspunkt svarer til projektionen af øjepunktet **Ø** ind på billedplanen, det såkaldte hovedforsvindingspunkt **H**.

Enhver ret linje, der står vinkelret på billedplanen vil enten afbildes i hovedforsvindingspunktet **H** (hvis den rette linje indeholder øjepunktet **Ø**) eller i en ret linje gennem hovedforsvindingspunktet.

Den **vandrette** plan gennem øjepunktet **Ø**, kaldet horisontplanen, skærer billedplanen i en ret linje kaldet **horisonten**. Hvis specielt billedplanen står lodret vil de to planer, den vandrette plan gennem øjepunktet og den lodrette billedplan, stå vinkelret på hinanden og horisonten vil da indeholde hovedforsvindingspunktet **H**. Alle vandrette dybdelinjer vil have deres forsvindingspunkt liggende på horisonten. Når man skal analysere perspektiviske billeder skal man dog huske på at billedplanen ikke altid står lodret. Fx vil man ofte kunne finde loftsmalerier, som forestiller himlen ovenover betragteren. Her vil billedplanen være vandret.

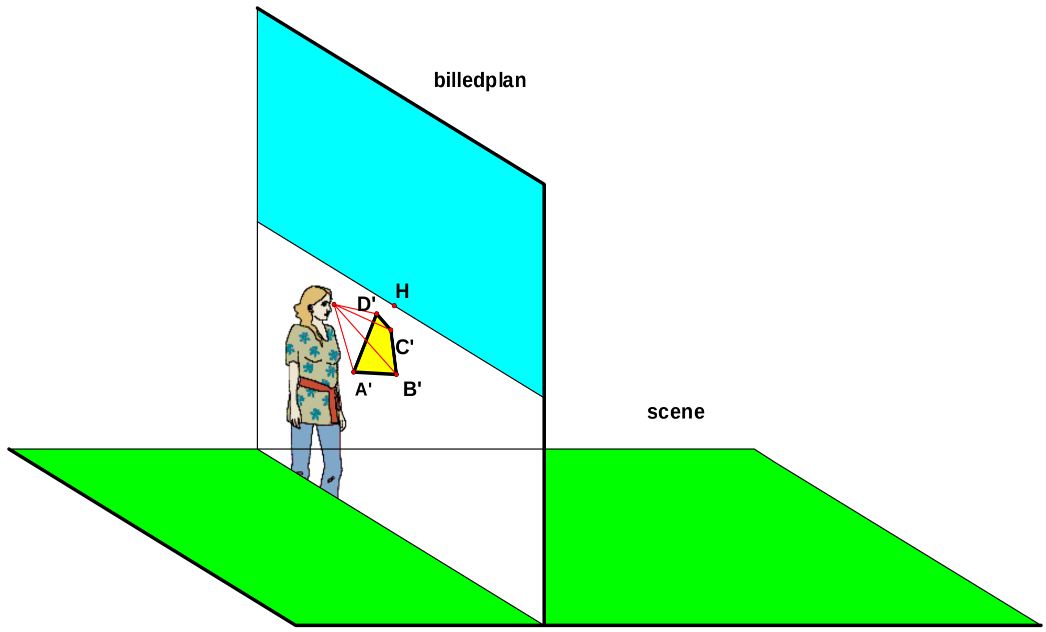
Når man afbilder en figur perspektivisk ved hjælp af en centralprojektion vil den ofte fremstå forvrænget: Rette vinkler i virkeligheden fremstår ikke som rette vinkler på tegningen, linjestykker der er lige store i virkeligheden fremstår ikke som lige store linjestykker på tegningen osv.



Der er dog en meget vigtig undtagelse: Hvis en simpel plan figur (polygon, cirkel osv.) ligger i en **frontplan**, dvs. en plan parallel med billedplanen vil billedet være en dermed ligedannet figur, der fremkommer ved en rumlig multiplikation mellem frontplanen og billedplanen med øjepunktet som multiplikationscentrum og forholdet mellem afstandene til de to planer som multiplikationsfaktor. Hvis punkterne **P** og **Q** er to punkter på figuren vil trekanterne **ØPQ** og **ØP'Q'** nemlig være ligedannede trekanter og forholdet mellem siderne **PQ** og **P'Q'** vil være det samme som ethvert andet forhold mellem korresponderende sider i trekanterne. Specielt vil det være det samme som forholdet mellem højderne for øjepunktet i de to trekanter. Men det er netop det samme som forholdet mellem afstandene fra øjepunktet til de to planer. Dette gør det specielt nemt at tegne figurer fra frontplaner, fordi formen er præcis den samme: Alle vinkler er bevaret og alle delingsforhold er bevaret, så midtpunkter går i midtpunkter osv.

Helt anderledes forholder det sig med plane figurer i dybdeplaner (dvs. planer som ikke er parallelle med billedplanen). Her vil der kunne være store forvrængninger af figuren. Vi kan derfor ikke umiddelbart se på tegningen, hvad den sande form er for en trekant eller en firkant. Der gælder den følgende overraskende sætning:

Enhver firkant på tegningen, som ikke er et parallelogram, vil i et passende valgt perspektiv kunne være tegningen af et kvadrat.



Denne sætning vil vi dog ikke bevise i dette dokument.[1]

[1] Sætning vil blive vist i et andet dokument på GeoMeters hjemmeside