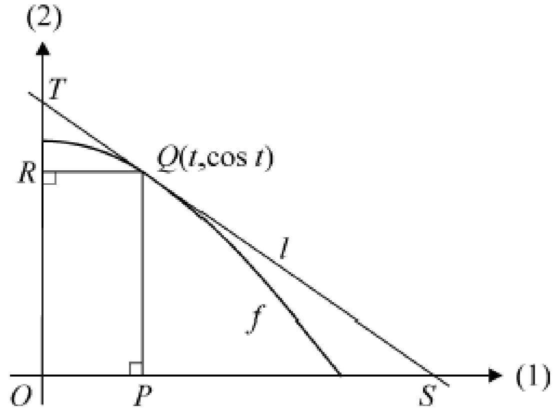
Optimeringsproblemer med GeoMeter

Bjørn Felsager, Haslev Gymnasium & HF, 2003

Den følgende artikel er skrevet for at illustrere hvor langt man egentlig kan komme med GeoMeter som værktøj i undervisningen, når man vil undersøge optimeringsproblemer, dvs. typiske problemstillinger med et stærkt geometrisk indhold, men også med en kraftig dosis funktionsteori. Traditionelt ville man da være henvist til både at anvende et geometriprogram og et grafregnerprogram. Men den nye GeoMeter er netop begge dele. Med udgangspunkt i en eksamensopgave illustrerer vi denne dobbelte brug af GeoMeter og viser samtidigt hvordan opgaven naturligt fører videre til et rimeligt avanceret projekt, der både kan undersøges geometrisk og symbolsk.

Første del: Eksempel på en eksamensopgave løst med GeoMeter

Opgave 7a
(ca. 15 point)



Figuren viser i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \cos x, \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{\pi}{2}.$$

For ethvert tal $t \in]0;\frac{\pi}{2}[$ er $Q(t, \cos t)$ et punkt på grafen for f. Idet P og R betegner projektionerne af Q på henholdsvis første- og andenaksen, er firkant $OPQR$ et rektangel med arealet $A(t) = t \cdot \cos t$.

Benyt grafregneren til at bestemme den værdi af t, for hvilken arealet af rektanglet er størst muligt.

Bestem for $t = \frac{\pi}{3}$ en ligning for tangenten til grafen for f i punktet Q.

For ethvert tal $t \in]0;\frac{\pi}{2}[$ betegner l tangenten til grafen for f i punktet Q. Tangenten skærer førsteaksen i punktet S og andenaksen i punktet T.

Gør rede for, at arealet $B(t)$ af trekant OST kan skrives som

$$B(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{\cos t}{\sin t}\right)(\cos t + t \sin t) \; .$$

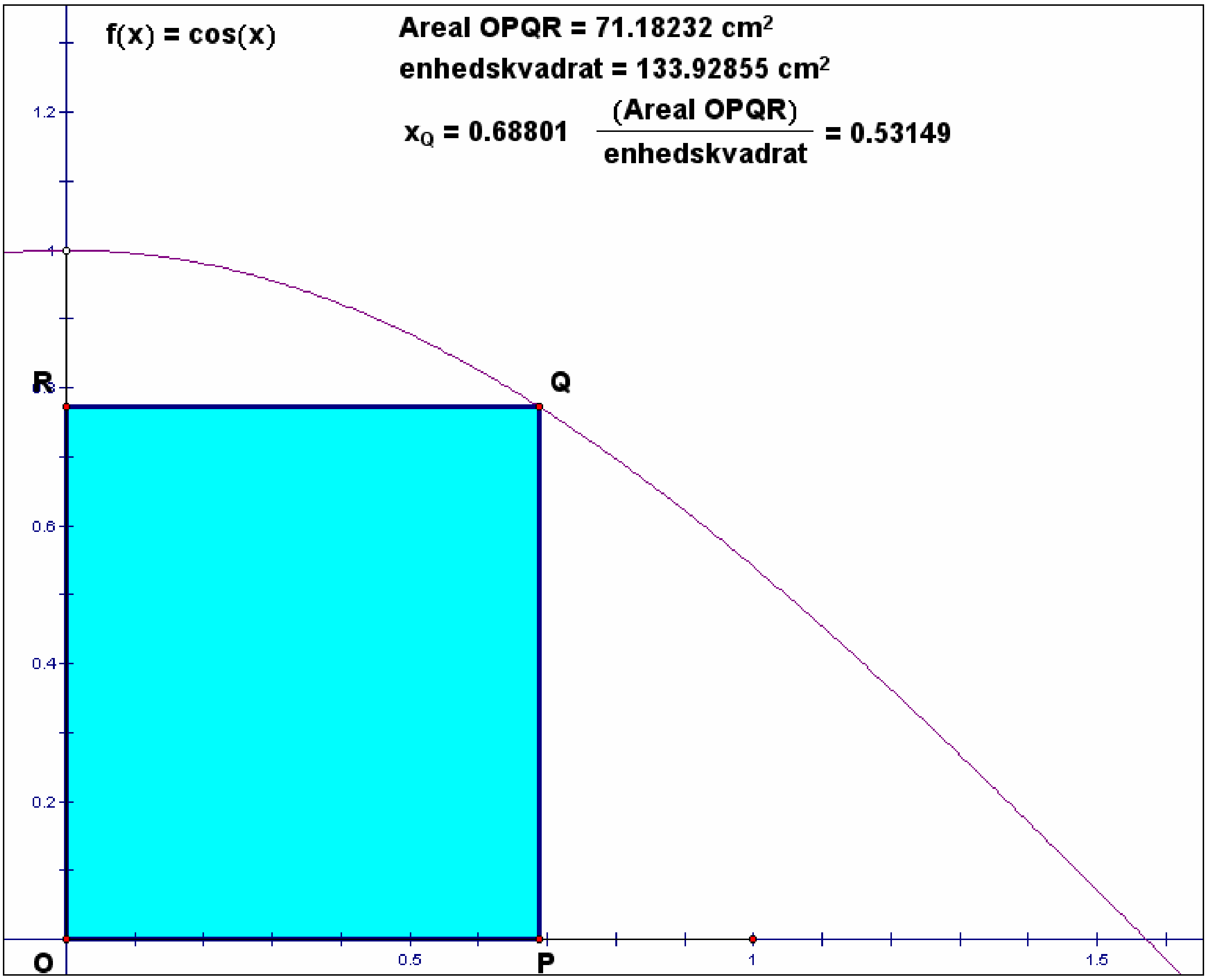
Benyt grafregneren til at bestemme den værdi af t, for hvilken $B(t)$ er mindst mulig.

Den ovenstående opgave er hentet fra sommersættet til det 3-årige A-niveau i 2001. Den er skræddersyet til en grafregner – og dermed også til GeoMeter.

Vi skal først have tegnet grafen for cosinus-funktionen og dernæst konstrueret det frie punkt Q på grafen. Derefter er det trivielt at konstruere rektanglet *OPQR* og finde dets areal ved hjælp af den indbyggede arealrutine. Men da arealrutinen i GeoMeter benytter cm-mål skal vi strengt taget også finde arealet af enhedskvadratet i koordinatsystemet og så udregne rektanglets koordinatareal ved at bestemme forholdet. Det ser således ud:

$$\text{Koordinatareal(polygon)} = \frac{\text{Areal(polygon)}}{\text{Areal(enhedskvadrat)}}$$

Bemærkning: Vi benytter skærmdumps til graferne i det følgende, da de er meget nemmere at afpasse til de rigtige udsnit:



Men så snart figuren er sat op og arealet fundet kan vi jo flytte rundt på Q indtil vi finder det maksimale areal. Det giver en præcis værdi for arealet, men en lille usikkerhed på x-koordinaten, da arealet næste ikke varierer lige i nærheden af maksimumsstedet og vi ydermere kun kan finde x-værdien til 'nærmeste pixel'. Men det samme gælder jo også en sporing på en almindelig grafregner ☺. Det giver følgende resultat:

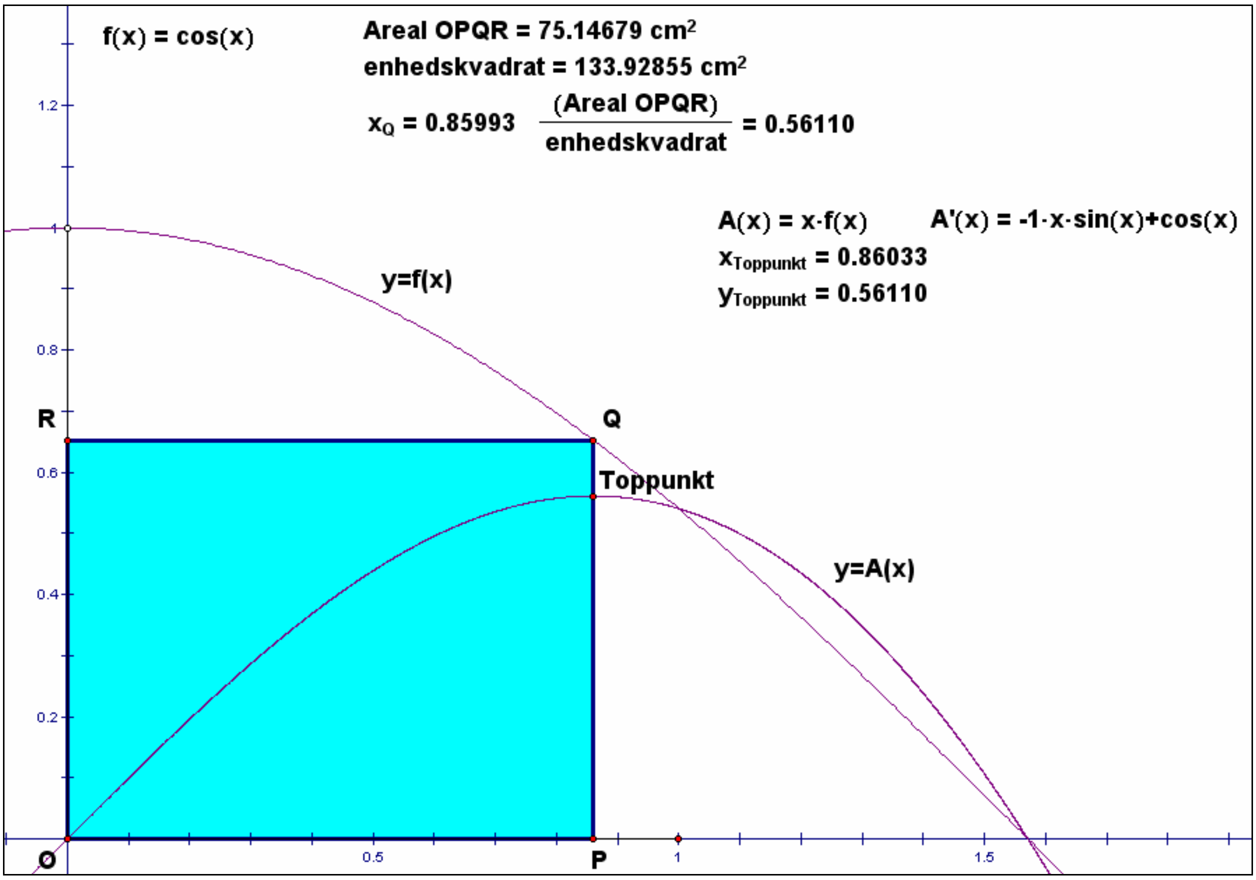
$$x_Q = 0.85993 \qquad \frac{\text{(Areal OPQR)}}{\text{enhedskvadrat}} = 0.56110$$

Det makimale areal er altså givet ved 0.56110 og det findes lige i nærheden af $x_Q = 0.85993$.

Men det er selvfølgelig mere nøjagtigt at finde det maksimale areal ved beregning. Som nævnt i opgaveteksten er arealet af rektanglet givet ved det simple udtryk:

$$A = g \cdot h = x \cdot f(x)$$

Vi tilføjer derfor grafen for arealfunktionen $A(x)$ og bestemmer toppunktet for grafen:



Vi finder da netop at grafen for $A(x)$ har et tydeligt visuelt toppunkt netop ved den tidligere fundne placering af Q. Vi ser også som forventet at arealværdien er præcis den samme, men at x-værdien nu er blevet lidt mere præcis og faktisk er givet ved:

$$x_{toppunkt} = 0.86033$$

Ydermere kan GeoMeter differentiere symbolsk til husbehov, og vi ser, at den afledede for A-funktionen er givet ved

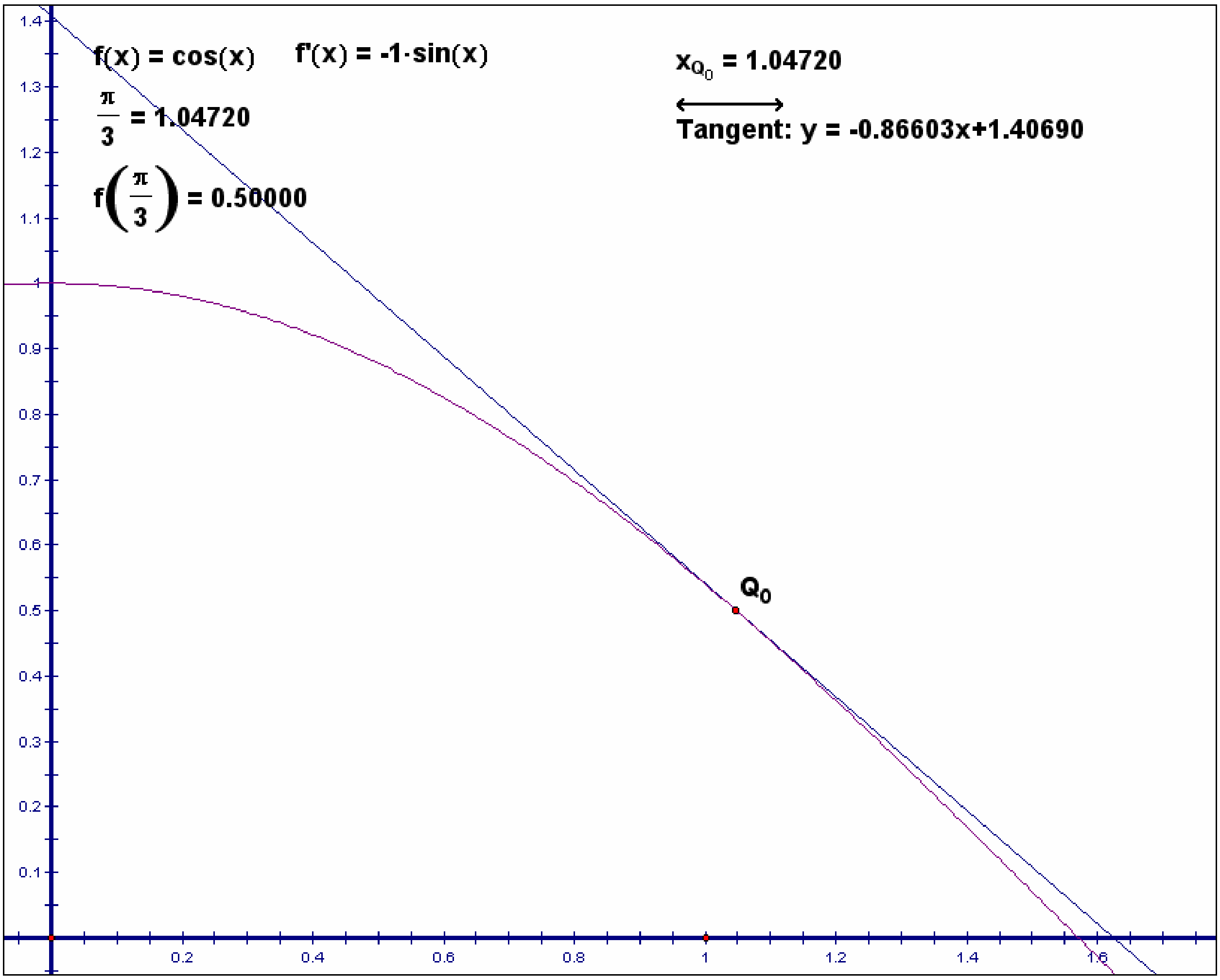
$$A'(x) = -x \cdot \sin(x) + \cos(x)$$

Toppunktet løser derfor ligningen $A'(x) = 0$, dvs.

$$x \cdot \sin(x) = \cos(x) \quad \Leftrightarrow \quad \tan(x) = \frac{1}{x}$$

Det er en transcendent ligning, der **ikke** kan løses symbolsk, så der er intet vundet ved at pudse en CAS-regner på den!

Der kommer så en lille mellemopgave, hvos vi skal finde tangent ligningen til grafen for cosinusfunktionen svarende til røringspunktet med $x = \pi/3$. Hvis vi benytter den indbyggede rutine finder vi:



Men det er jo ikke fint nok til det gamle CAS-forsøg, så vi differentierer f og benytter GeoMeter til at finde tangentligningen symbolsk via tangentformlen:

$$f_{lin}(x) = f\,'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

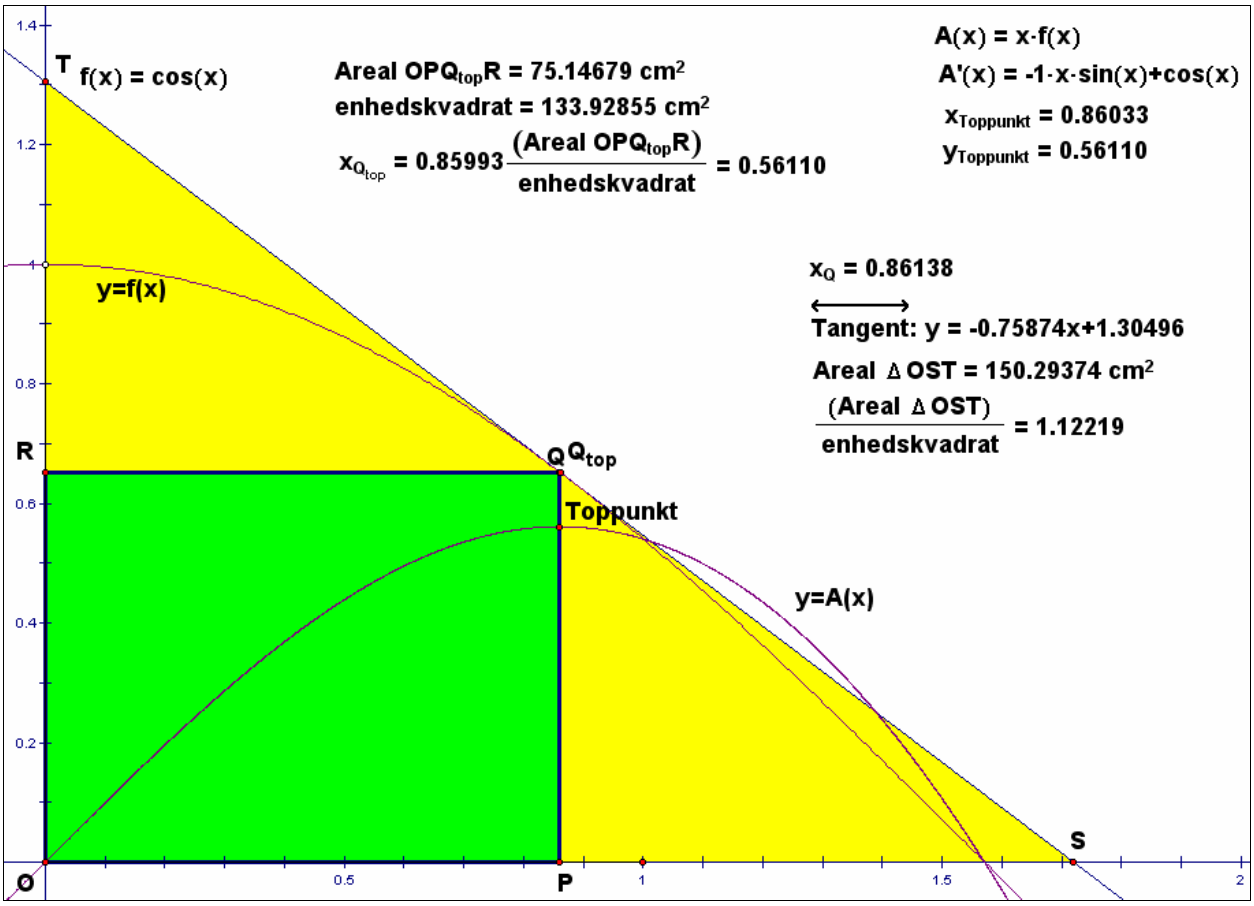
Grafen tegnes og falder selvfølgelig sammen med den tidligere fundne tangent. Men nu kan vi beregne såvel hældningen $a = f\,'(\pi/3)$ som skæringen med y-aksen $b = f(\pi/3) - f\,'(\pi/3)\cdot\pi/3$. Det giver selvfølgelig det samme resultat som før, men nu har vi også vist, hvor det kommer fra beregningsmæssigt:

$$g(x) = f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -0.86603$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)-f'\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\pi}{3} = 1.40690$$

Vi skal så se nærmere på den trekant, der afgrænses af tangenten til et frit grafpunkt Q og de to koordinatakser. Vi udskyder ligningen for arealet lidt og konstruerer trekanten geometrisk og udmåler dens areal (i forhold til arealet af enhedskvadratet). Som før kan vi da trække i punktet Q indtil arealet er minimalt:



Visuelt ser det ud som om de to ekstremumssteder falder sammen, men koordinaterne er ikke helt ens: Denne gang finder vi at trekanten er mindst mulig når $x \approx 0.86138$, mens rektanglet var størst muligt ved $x \approx 0.85993$. Det kan imidlertid skyldes den begrænsede pixel-nøjagtighed, når vi flytter musen. Vi lægger i forbifarten også mærke til, at forholdet mellem de to optimale arealer ser ud til at være 2.

Vi kan igen få mere styr på minimumsstedet, hvis vi kan opstille et funktionsudtryk for den omskrevne trekants areal. I nødstilfælde må vi selvfølgelig bruge det udtryk, der foræres i opgaven. Ellers kan vi ræsonnere således. Tangentens ligning er givet ved: $y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$. Skæringen h med y-aksen fås ved at sætte $x = 0$, dvs. trekantens højde h er givet ved:

$$h = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(0 - x_0) = f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0)$$

Skæringen g med x-aksen fås ved at sætte y = 0, dvs. trekantens grundlinje g er givet ved:

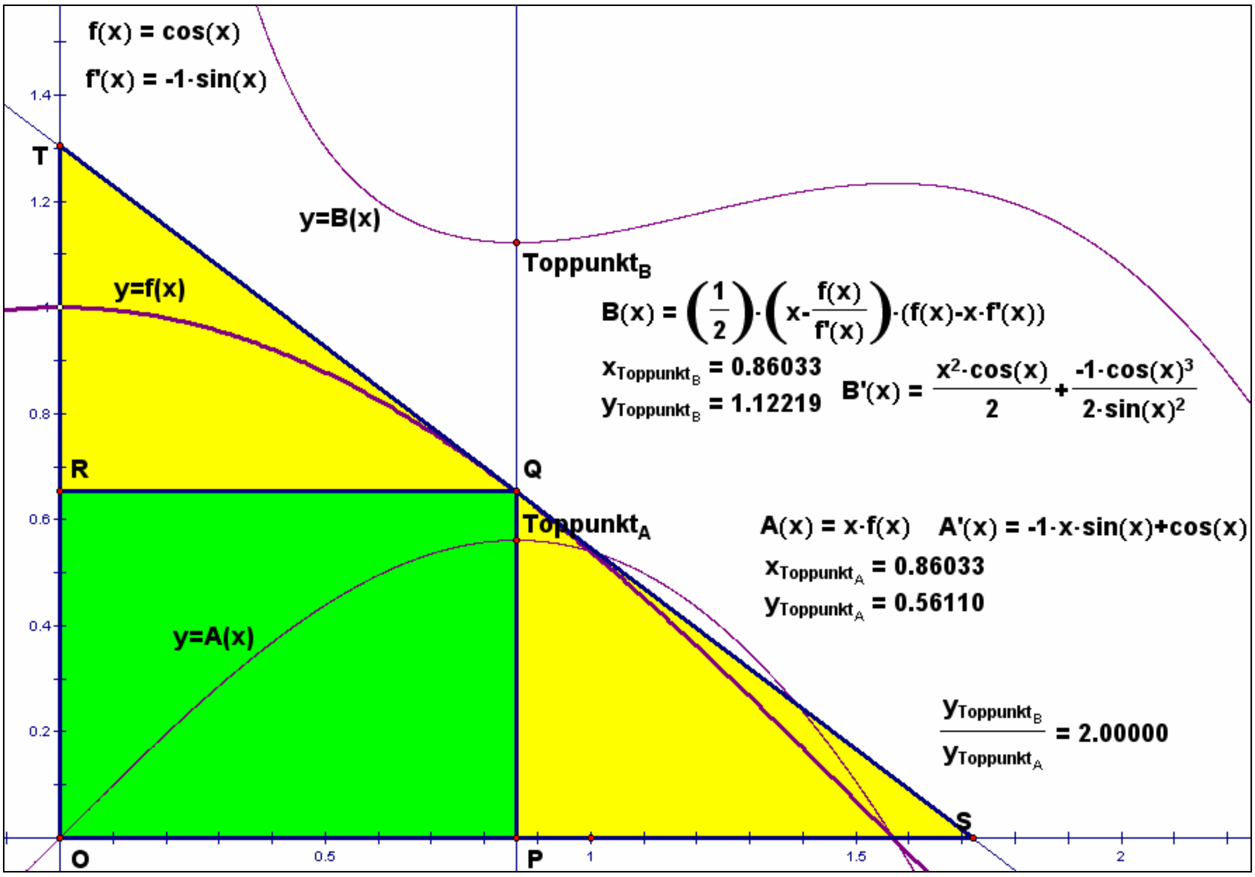
$$0 = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(g - x_0) \quad \Rightarrow \quad g - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f(x_0)} \quad \Rightarrow \quad g = x_0 - \frac{f(x_0)}{f(x_0)}$$

Altså er trekantens areal givet ved:

$$B(x_0) = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}) \cdot (f(x_0) - x_0 \cdot f'(x_0))$$

Bemærkning: Med lidt trigonometrisk snilde kan man vise det er det samme som det i opgaveteksten opgivne udtryk.

Vi indskriver derfor arealfunktionen *B*(x) og finder minimumstedet:



Denne gange er der ingen slinger i valsen: Minimumsstedet for den omskrevne trekant ligger præcis det samme sted som maksimumsstedet for det indskrevne rektangel, nemlig i x = 0.86033. Og arealet af den minimale trekant er netop det dobbelte af arealet for det maksimale rektangel.

Endvidere har vi udnyttet GeoMeters evne til at differentiere symbolsk til hus-behov og fundet differentialkvotienten:

$$B'(x) = \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{2} + \frac{-\cos(x)^3}{2 \cdot \sin(x)^2}$$

Det stationære punkt for *B*-funktionen løser derfor ligningen:

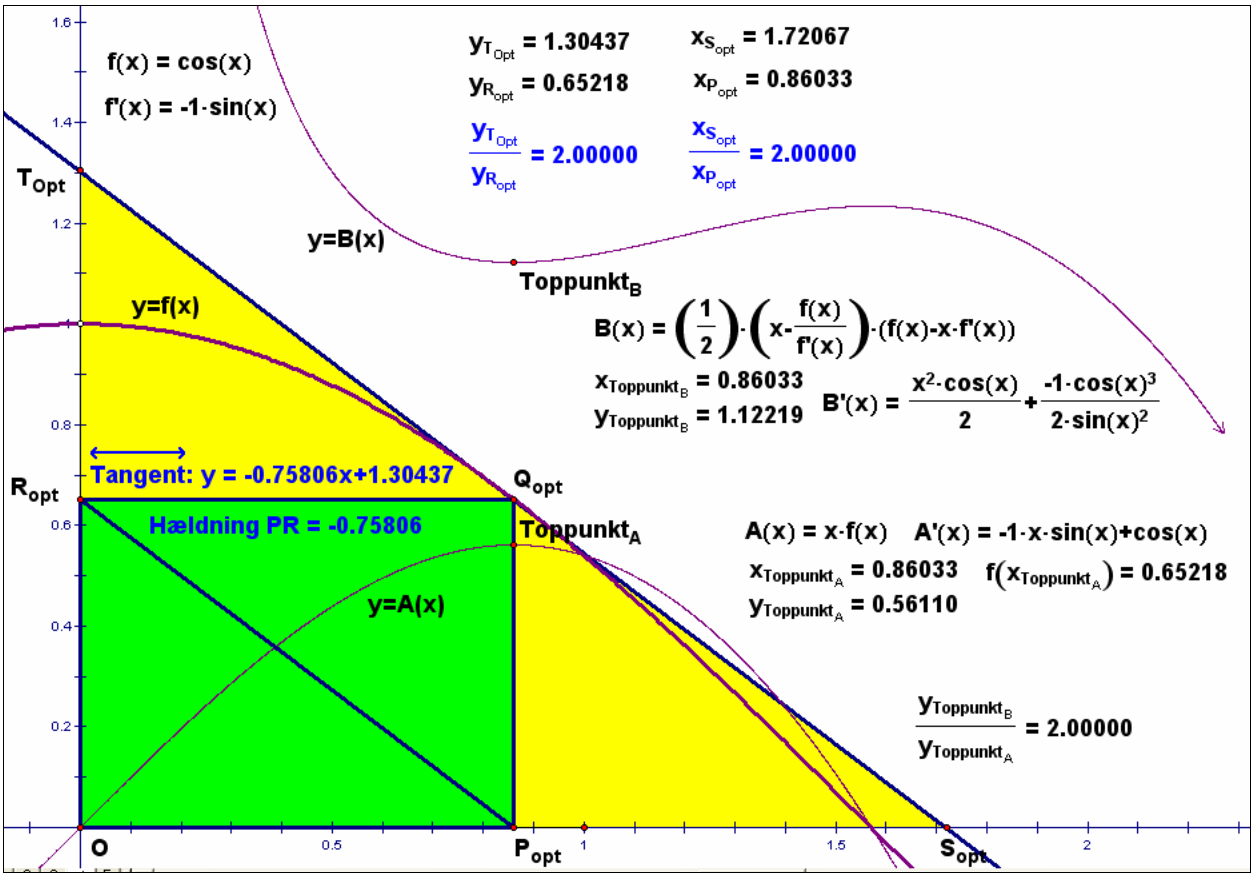
$$B'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2 \cdot \cos(x)}{2} - \frac{\cos(x)^3}{2 \cdot \sin(x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\cos(x)}{2} \cdot \left(x^2 - \frac{\cos(x)^2}{\sin(x)^2} \right)$$

Der er altså to muligheder: Det kan være cos(x) = 0, svarende til det højre endepunkt $\pi/2$, hvor der jo netop er et stationært punkt (et lokalt maksimum), eller vi skal finde en løsning til ligningen

$$\tan^2(x) = \frac{1}{x^2}$$

Bortset fra at vi har kvadreret ligningen er det den samme ligning som før.

Vi har nu løst opgaven – næsten fuldstændigt – i GeoMeter sådan som den blev stillet til eksamen, men inden vi forlader selve eksamensopgaven, gør vi lige endnu en observation: Det optimale rektangel og den optimale trekant ligger meget pænt i forhold til hinanden: Ikke blot er arealet af trekanten dobbelt så stor, men trekantens grundlinje er også netop dobbelt så stor som rektanglets grundlinje, ligesom trekantens højde er dobbelt så stor som rektanglets højde. Den optimale konfiguration er altså kendetegnet ved en høj grad af symmetri, hvor tangentens hældning netop er den samme som hældningen for diagonalen *PR* i rektanglet:



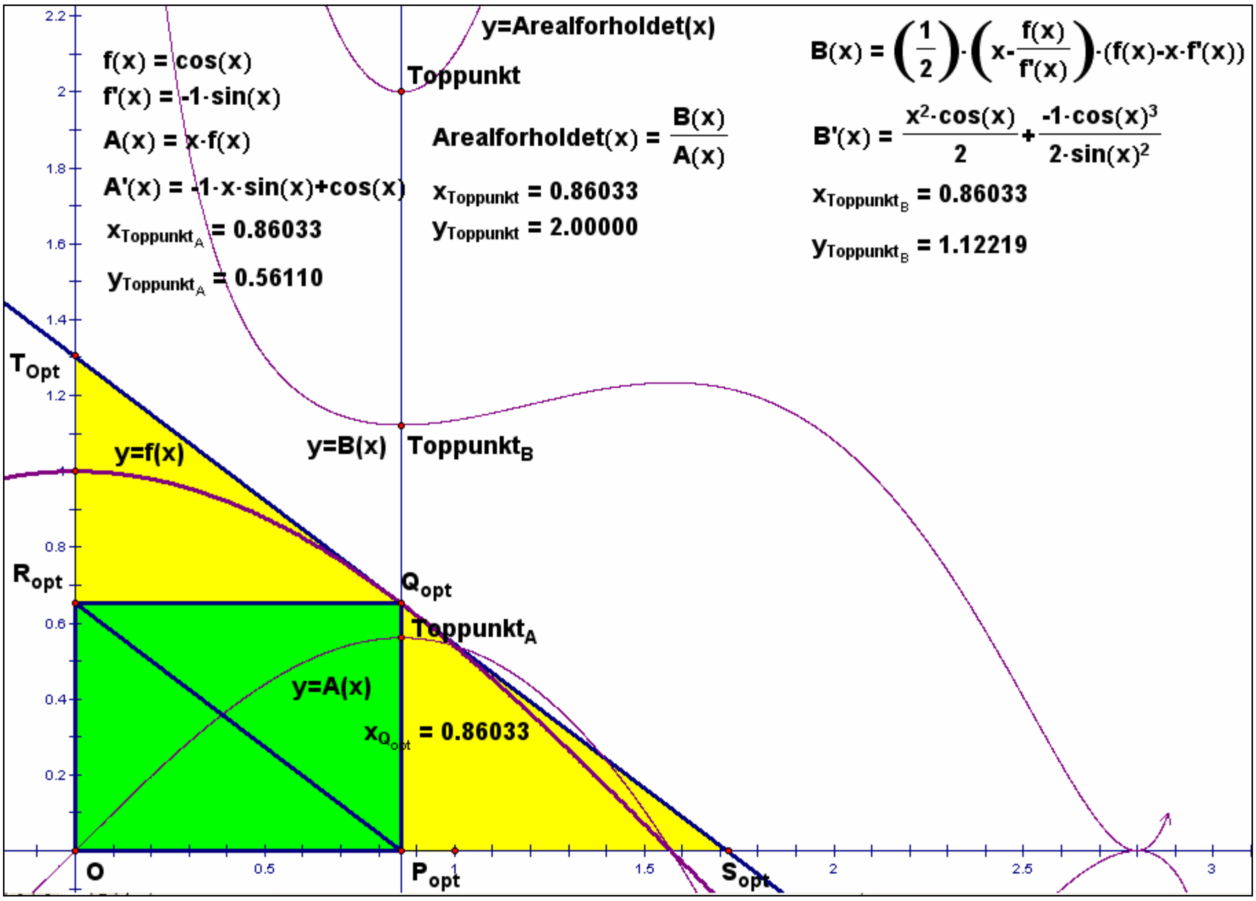
Vi har altså indtil videre gjort de følgende fire observationer (som det jo ville være skønt at få med i opgavebesvarelsen ☺):

1. Maksimumsstedet for det indskrevne rektangel er det samme som minimumsstedet for den omskrevne trekant.
2. Arealet for den minimale omskrevne trekant er dobbelt så stort som arealet for det indskrevne rektangel.
3. Grundlinjen og højden for den minimale omskrevne trekant er dobbelt så stor som grundlinjen og højden for det indskrevne rektangel.
4. Grafen for arealet af den omskrevne trekant kan godt have flere stationære punkter end grafen for det indskrevne rektangel.

To ting melder sig nu naturligt:

For det første: Hvad er der specielt ved forholdet 2?

Det gør det nærliggende at se på grafen for forholdet: $B(x)/A(x)$.



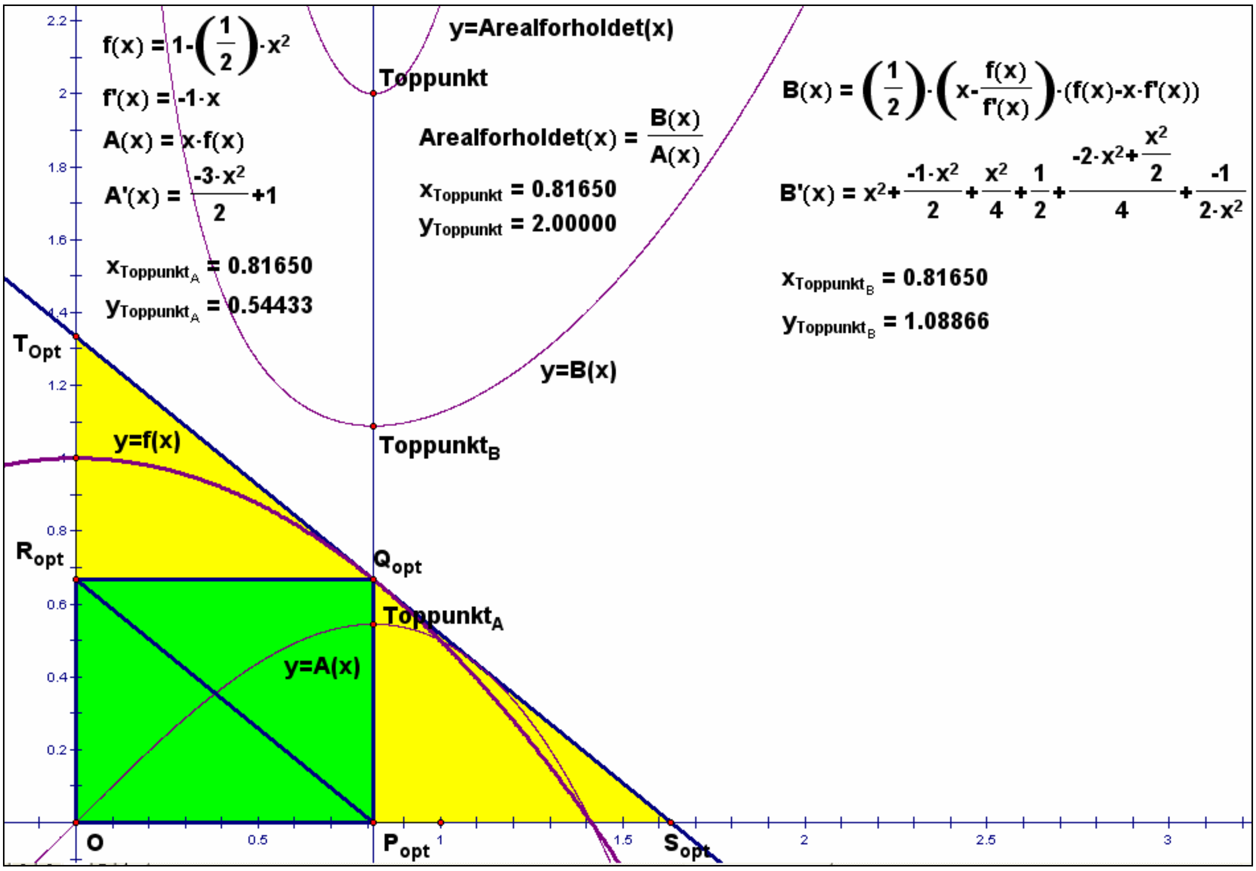
Ikke overraskende viser det sig at arealforholdet netop er minimalt det samme sted, og at den minimale værdi er 2.

For det andet: Er alle disse observationer noget der er helt specielt for cosinusfunktionen eller gælder de mere generelt for en passende klasse af grafer, der minder om cosinus-grafen? Fx graferne for differentiable funktioner, der er aftagende og nedad hule i første kvadrant?

Men det kan vi jo få et vink om ved at udskifte cosinusfunktionen med fx en parabel funktionen:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

Da GeoMeter er et dynamisk program vil en opdatering af funktionsudtrykket for f øjeblikkelig føre til en øjeblikkelig automatisk genberegning af alle de andre funktioner og beregninger. Enkelte konstruktioner som toppunkter og lignende kan dog springe til nye toppunkter, hvis de indbyrdes placeringer skifter drastisk. Fx har grafen for trekantarealet $B(x)$ to toppunkter, og vi kan risikere, at det fundne minimumspunkt springer over til det lokale maksimumspunkt på den nye graf. Det må så føres tilbage igen til den rette placering:



Og jo da, alle egenskaberne overlever! Selve værdien for maksimumsstedet er en ny ($x \approx 0.81650$) og denne gang kan vi faktisk finde den symbolsk

$$x = \sqrt{2/3}\ .$$

Men ellers er alt som før. Meget tyder altså på at der virkelig er tale om nogle helt generelle egenskaber, som kan gøres til genstand for en særskilt undersøgelse, der naturligvis fuldstændigt springer rammerne for den oprindelige eksamensopgave.

Det er nu muligt at foretage en generel undersøgelse ved hjælp af symbolske CAS-værktøjer, noget jeg har gjort i artiklen

Some like it hot: Højere ordens tænkning med CAS.

Men det giver kun den symbolske synsvinkel, som ikke nødvendigvis kaster meget lys over, **hvorfor** der gælder de ovenstående observationer, og heller ikke nødvendigvis sætter dem ind i en bredere ramme.

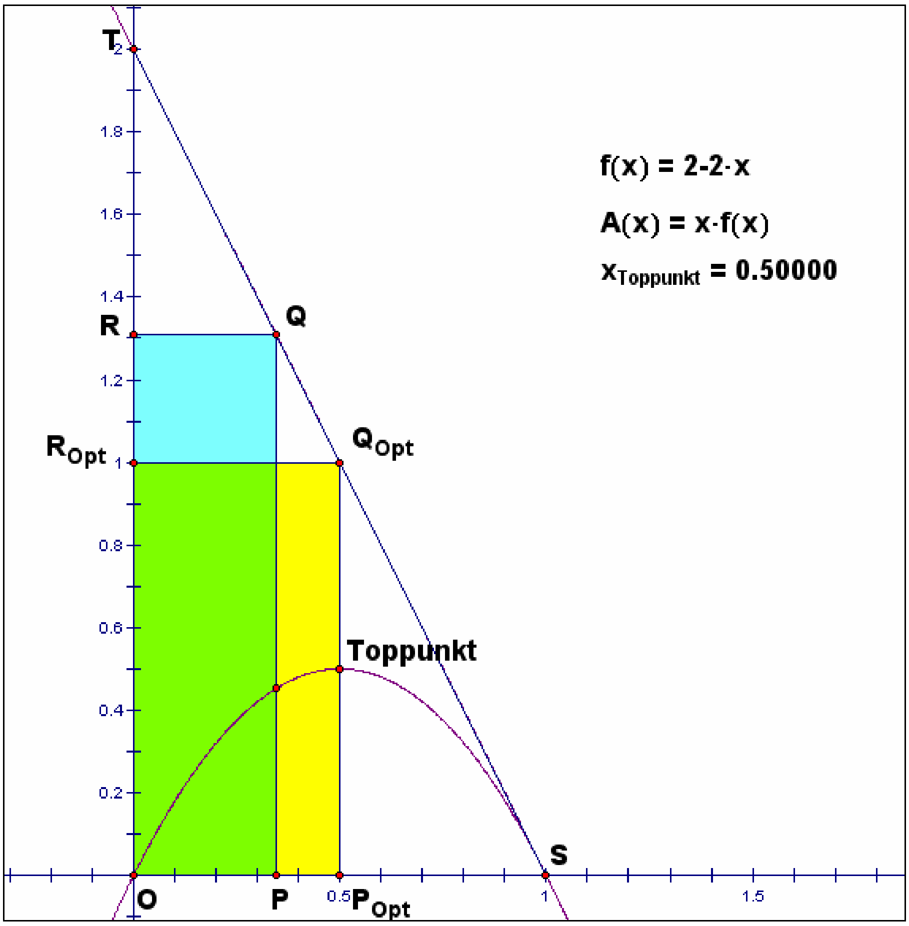
Det kan derfor være yderst instruktivt at se, hvor langt man egentlig kan komme med rent geometriske betragtninger passende støttet af GeoMeter. Det handler den anden del af artiklen om!

Anden del: Den geometriske synsvinkel

Vi arbejder først med det indskrevne rektangel. Når man varierer på grafpunktet Q' s position flytter punkter sig langs grafen for f. Men i en lille omegn af et grafpunkt er grafen for f næsten lineær, så med stor tilnærmelse flytter det sig også langs tangenten. Arealet forandres i begge tilfælde med samme hastighed, fordi den afledede af arealet kun afhænger af funktionsværdien $f(x)$ og differentialkvotienten $f'(x)$, og de er jo fælles for grafen og tangenten:

$$A(x) = x \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad A'(x) = f(x) + x \cdot f'(x)$$

I stedet for at se på en vilkårlig graf kan vi altså nøjes med at se på en lineær graf! Men så er problemet jo rimeligt simpelt. Hvis grafen for f er lineær er grafen for arealfunktionen $A(x) = x \cdot f(x)$ jo en parabel der skærer x-aksen i (0,0) og randpunktet S, hvor også den lineære funktion er 0:

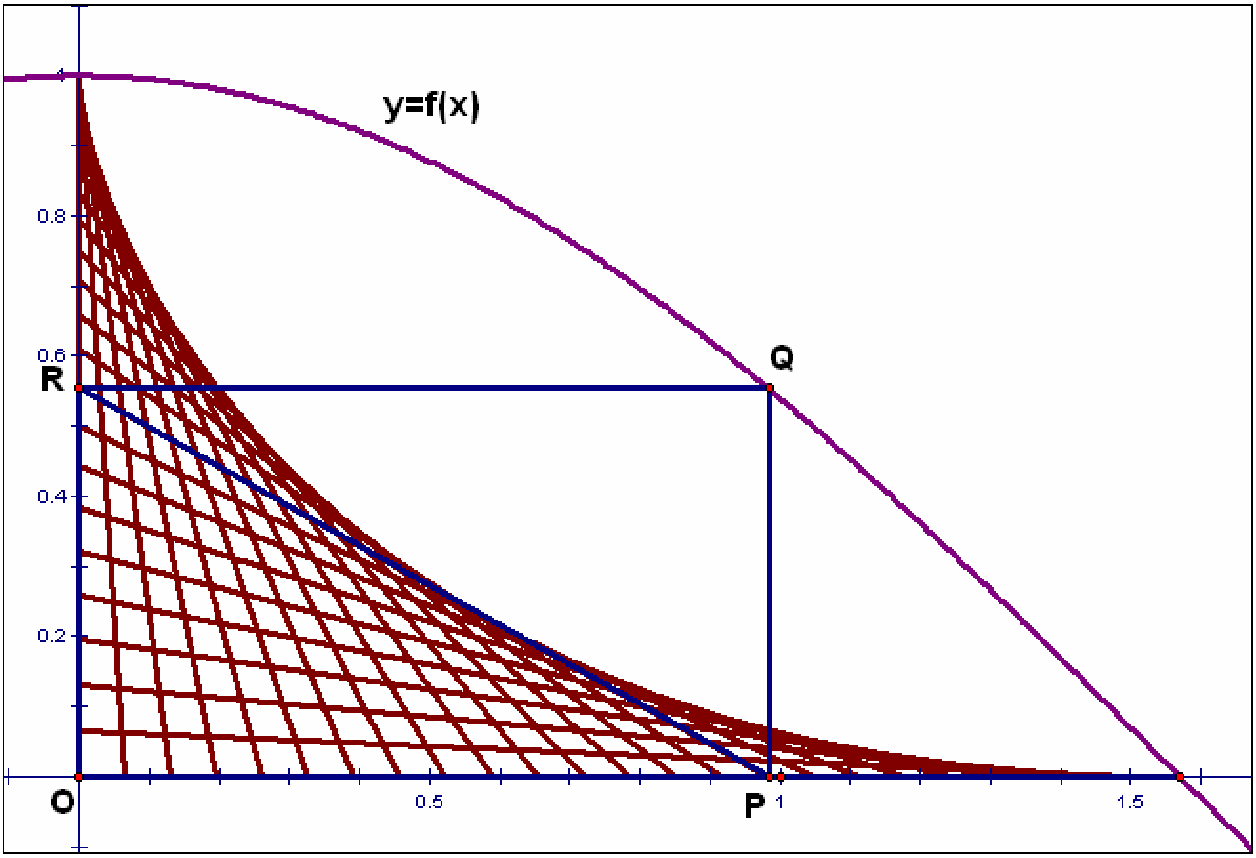


Altså ligger det optimale fodpunkt P_{Opt} netop halvvejs mellem rødderne O og S, ligesom R_{Opt} ligger halvvejs mellem O og T. Det maksimale rektangel er altså netop halvt så stor som trekanten afskåret af den lineære graf.

Men det overføres jo uden videre til den almene graf:

Hvis f er en vilkårlig differentiabel funktion med en aftagende nedad hul graf i første kvadrant, så vil det største rektangel indskrevet i grafen for f også være det største rektangel indskrevet i tangenten til røringspunktet. Og dermed vil det netop være halvt så stort som den omskrevne trekant afskåret af tangenten med halvt så stor grundlinje og halvt så stor højde.

Vi kan ydermere argumentere for at der må være en **entydig** løsning til problemet med det indskrevne rektangel. Hvis grafen for f er aftagende må hældningen for diagonalen PR (der er negativ!) nemlig være voksende fra $-\infty$ (lodret diagonal) i venstre endepunkt O til 0 (vandret diagonal) i højre endepunkt S:

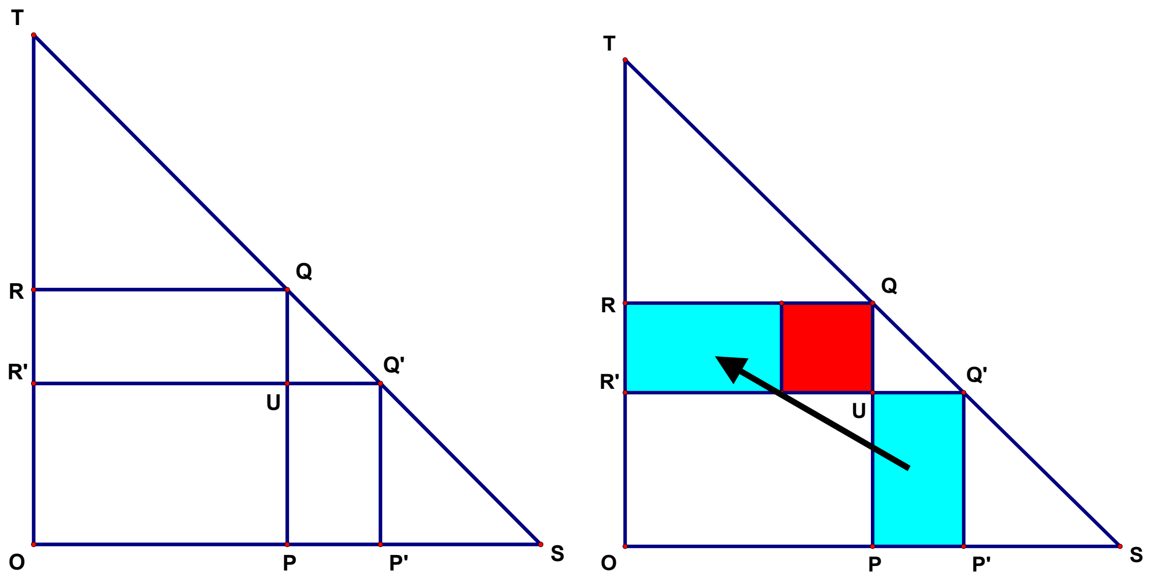


På den anden side er grafen nedad hul, dvs. tangentens hældning – som jo er negativ – er aftagende på det samme stykke. Der må derfor findes netop et punkt Q på grafen, hvor de to hældninger er ens, og hvor grundlinjen og højden for det indskrevne rektangel derfor netop er halvt så store som grundlinjen og højden for den trekant, der afskæres af tangenten. Men det er jo netop det maksimale rektangel.

Vi har altså løst problemet generelt ved at appellere til en simpel egenskab ved lineære grafer. Og alt hvad vi har benyttet i den henseende er dels at grafen for arealfunktionen er en parabel, fordi arealfunktionen selv bliver et andengradspolynomium, dels at toppunktets for en parabel netop ligger midtvejs mellem rødderne.

Men vi kan gøre det endnu mere enkelt: Ved en lodret skalering ud fra x-aksen (ret affinitet) ændres alle højder med den samme faktor faktor og det samme gælder arealerne. Vi kan altså roligt ændre hældningen for den rette linje uden at ændre på placeringen af det maksimalt indskrevne rektangel. Men så kan vi jo gerne antage at hældningen er -1. Men i så fald er summen af grundlinjen og højden konstant, dvs. rektanglet har konstant omkreds. Vi søger altså det rektangel med en fast omkreds, der har det største areal. Men det er velkendt fra elementær geometri at det netop er et kvadrat. Hermed får vi det første problem ført tilbage til en elementær egenskab ved kvadrater. Vi kan fx føre et elementært bevis på følgende måde:

I en ligebenet retvinklet trekant indskrives såvel et kvadrat som et rektangel. Da trekanten er ligebenet har rektanglet altså samme omkreds som kvadratet, idet stykkerne *QU* og *Q'U* er lige store osv. Men så kan vi jo flytte det **lille** lodrette rektangel *PUQ'P'* op i det vandrette rektangel *RQUR'*:



Det overskydende kvadrat med siden *QU* viser da netop hvor meget større kvadratet sammenlignet med rektanglet: Altså er kvadratet rent faktisk større end rektanglet.

Vi kan også ræsonnere algebraisk: Hvis rektanglets sider er a og b må kvadrates side være $\dfrac{a+b}{2}$ og det samme forhold vises da algebraisk således:

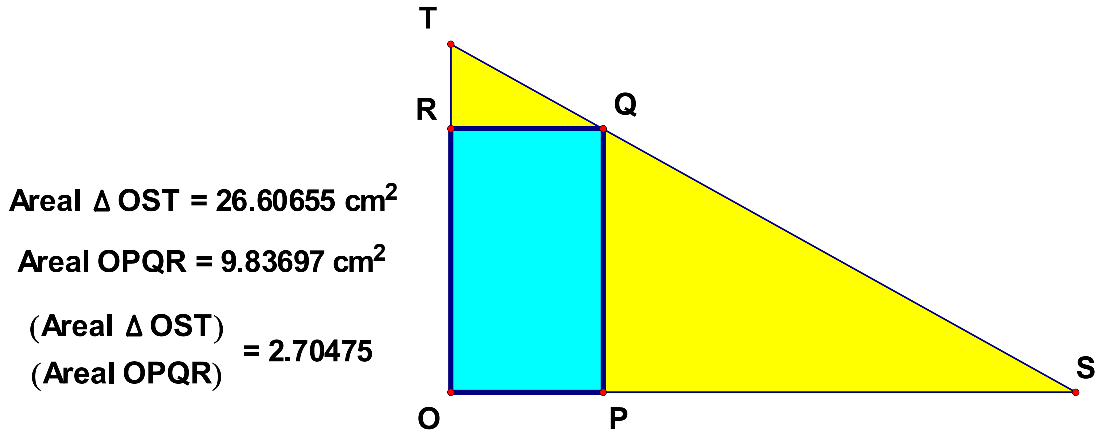
$$\square - \text{▭} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - a \cdot b = \frac{a^2 + b^2 + 2a \cdot b - 2a \cdot b}{2} = \frac{a^2 + b^2 - 2a \cdot b}{2} = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$$

Dermed har vi i alle detaljer givet en geometrisk redegørelse for problemet med det maksimalt indskrevne rektangel i en aftagende nedad hul graf i første kvadrant.

Tilbage står så det andet problem med den mindste omskrevne trekant. Det er et langt sværere problem. Fx indgår den første afledede også i udtrykket for trekantens areal, og dermed indgår den anden afledede i trekantarealets variation. Vi kan derfor ikke som før reducere problemet til et rent lineært problem, hvor vi erstatter grafen med dens tangent. I stedet kan vi fx reducere problemet til et kvadratisk problem, hvor vi erstatter grafen med det approksimerende andengradspolynomium. Men det er en symbolsk øvelse snarere end en rent geometrisk øvelse. Så her gør vi noget helt andet – vi omformulerer problemet ☺

Vi har allerede set numerisk/grafisk at det fælles ekstremumssted for det maksimalt indskrevne rektangel og den minimalt omskrevne trekant også er ekstremumsstedet for forholdet mellem de to arealer. Vi kigger derfor i stedet på forholdet mellem de to arealer. Her kan vi nemt vise en lille sætning:

Hvis et rektangel er indskrevet i en retvinklet trekant med et fælles retvinklet hjørne er forholdet mellem trekantens areal og rektanglets areal mindst to, og det minimale forhold opnås netop, når grundlinjen og højden i rektanglet er halvt så stor som grundlinjen og rektanglet i trekanten:



Bevis: Det følger af at vi allerede har vist, at det største rektangelareal fås når *P* er midtpunktet for grundlinjen OS (og dermed tilsvarende når *R* er midtpunktet højden *OT*). Så hvis vi varierer firkanten, fås den største nævner og dermed den mindste brøk, netop når rektanglet er halvt så stort som trekanten.

Hvad har vi vist:

Hvis grafen for den differentiable funktion *f* er aftagende og nedad hul i første kvadrant så findes der et entydigt maksimumssted for det indskrevne rektangel og det er karakteriseret ved at det netop er halvt så stort som den omskrevne trekant. Forholdet mellem arealerne af den omskrevne trekant og den indskrevne rektanglet er derfor minimalt i det pågældende punkt.

Men hvis både arealet af det indskrevne rektangel og forholdet mellem arealerne for trekanten og rektanglet er stationære, må det samme gælde for arealet af den omskrevne trekant. Hvis nævneren i en brøk er stationær er nævneren nemlig konstant til laveste orden. Hele brøken varierer derfor på samme måde som tælleren til laveste orden.

Konklusion: Arealfunktionen $B(x)$ for trekanten har netop et stationært punkt det samme sted, hvor arealfunktionen $A(x)$ for rektanglet har sit maksimum.

Vi kan bakke det op i detaljer med en symbolsk betragtning således:

Vi ved at der findes et entydigt stationært punkt x_0 for arealfunktionen $A(x)$, dvs. specielt gælder $A'(x_0) = 0$. Men vi ved også at forholdet (kvotienten) mellem de to arealfunktioner $k(x) = B(x)/A(x)$ antager værdien 2 i dette punkt. men det er den minimale værdi for forholdet, dvs. der gælder også: $k'(x_0) = 0$. Men så fås netop

$$B(x) = k(x) \cdot A(x) \quad \Rightarrow$$
$$B'(x_0) = k'(x_0) \cdot A(x_0) + k(x_0) \cdot A'(x_0) \quad \Rightarrow B'(x_0) = 0 \cdot A(x_0) + 2 \cdot 0 = 0$$

Hvad har vi ikke vist?

Vi har ikke vist at det nødvendigvis er et minimumssted for $B(x)$, dvs. at trekantarealet er minimalt. Og selv om det var et minimum har vi ikke vist at der ikke kan være andre stationære punkter og dermed andre minima. Vi ved med andre ord heller ikke om det nødvendigvis er et globalt minimum.

Bemærkning: Man kunne håbe på at argumentere simpelt for minimumsegenskaben via den anden afledede:

$$
\begin{aligned}
B'(x) &= k'(x)\cdot A(x) + k(x)\cdot A'(x) \quad \Rightarrow \\
B''(x_0) &= k''(x_0)\cdot A(x_0) + 2k'(x_0)\cdot A'(x_0) + k(x_0)\cdot A''(x_0) \\
&= k''(x_0)\cdot A(x_0) + 2\cdot 0\cdot 0 + 2A''(x_0) = k''(x_0)\cdot A(x_0) + 2A''(x_0)
\end{aligned}
$$

Her ved vi nu, at $k''(x_0) \geq 0$ fordi forholdet er minimalt og at $A''(x_0) \leq 0$ fordi rektanglets areal er maksimalt. Vi ved selvfølgelig også at $A(x_0)$ er positivt. Men det viser blot at $B''(x_0)$ er summen af et positivt og et negativt led. Vi har altså ikke styr på fortegnet for $B''(x_0)$ og dermed heller ikke styr på om trekantarealet B er tvunget til at have et minimum.

VI kan se det samme på direkte på forholdet $B(x)/A(x)$. Nævneren aftager til anden orden, fordi arealet af det indskrevne rektangel er maksimalt. Det betyder at nævneren bidrager til at brøken vokser. Men det levner plads for at tælleren godt kan aftage til anden orden, blot den aftager så langsomt, at den ikke ødelægger den overordnede stigning af brøken. Der er med andre ord plads til at tælleren kan aftage langsommere end det voksende bidrag fra nævneren. Det er altså kun den detaljerede kobling mellem de to arealer, der sikrer at tælleren rent faktisk vokser. Og det er ikke helt nemt at gøre rede for i detaljer, se fx det detaljerede symbolske argument i artiklen 'Some like it hot'.

Alligevel er vi kommet meget langt ved at appellere til to meget simple egenskaber ved firkanter og trekanter. Den geometriske indsigt er derfor et nyttigt supplement til den symbolske indsigt, som vi har gennemført i fuld detalje i den anden artikel 'Some like it hot'.

Men geometrisk indsigt vinder man kun ved selv at indhøste erfaringer med geometri, dvs. ved selv at visualisere problemstillingerne.

Konklusion: Dette taler for at dynamiske geometriprogrammer som GeoMeter bør tildeles en langt større rolle i matematikundervisningen på det gymnasiale niveau end det er tilfældet i øjeblikket ☺.