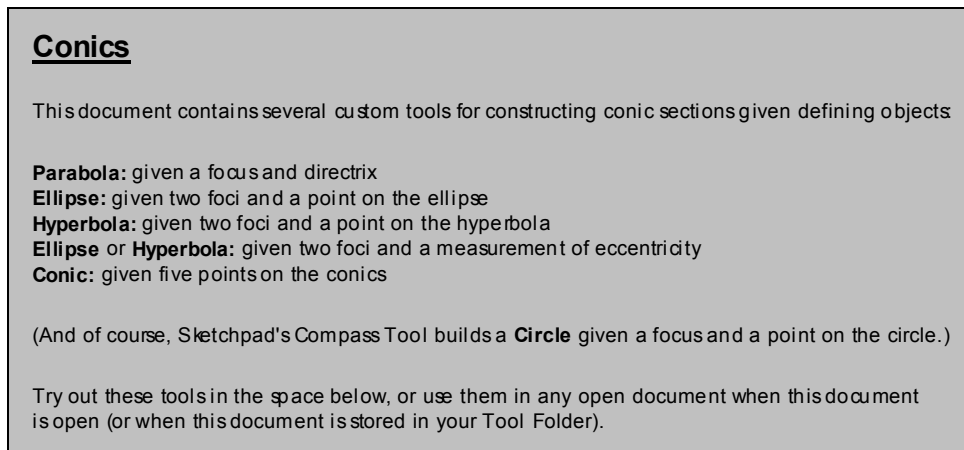


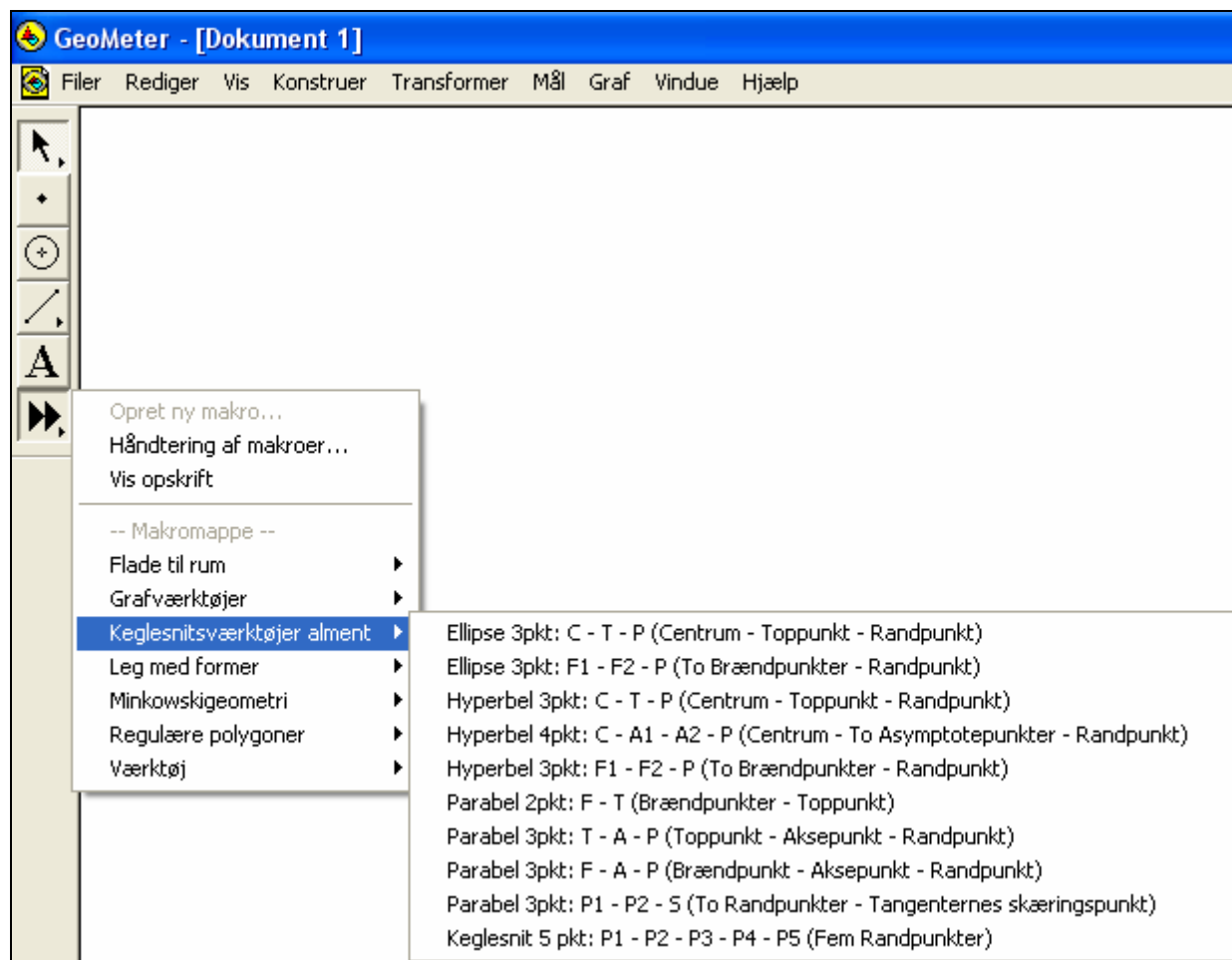
Keglesnitsværktøjer

De følgende værktøjer er beregnet til at tegne keglesnit på forskellig vis, såsom ellipser og hyperbler ud fra centrum, toppunkter, halvaksler og lignende. Der er faktisk allerede inkluderet nogle værktøjer til at tegne keglesnit med i GeoMeter. En typisk sti til folderen **Conics** ser således ud:

C:\Programmer\geometer1-1\GSP_i_undervisningen\Samples\Custom Tools\Conics

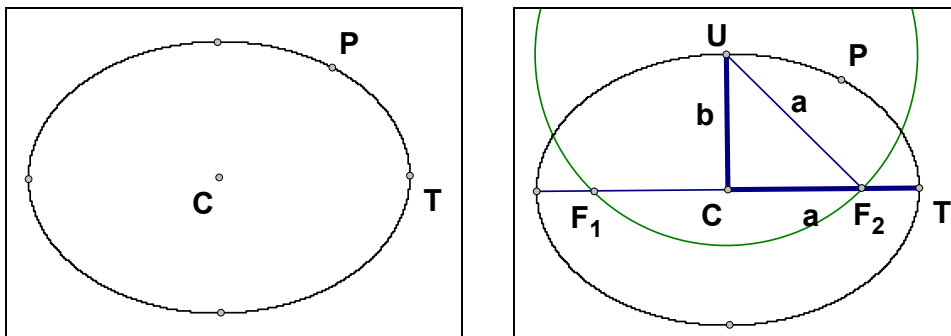


En del af dem minder selvfølgelig om de samme værktøjer i den danske pakke. Værktøjerne i den foreliggende pakke er knyttet til filen: **Keglesnitsværktøjer alment.gsp**, som fx kan hentes på GeoMeters danske hjemmeside. Hvis man kopierer filen over i makromappen for GeoMeter vil værktøjerne automatisk blive indlæst som vist på figuren nedenunder. Ellers må man åbne filen og have den kørende i baggrunden, når man ønsker at bruge disse værktøjer.



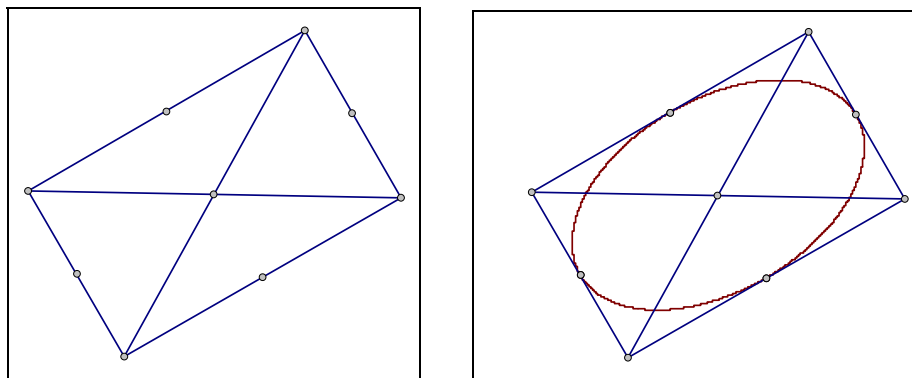
1. Ellipse 3pkt: C – T – P (Centrum – Toppunkt – Randpunkt)

Vi ser først på ellipsen defineret ud fra sit **centrum** og sine **halvakser**. Vi vil da typisk have centrum og et **toppunkt** til rådighed. Dertil kommer så endnu et tilfældigt punkt på ellipsen, der selvfølgelig godt kan vælges som toppunktet hørende til den anden akse. På den måde kan man fx nemt konstruere ellipsen indskrevet i ét rektangel. Når man vælger dette værktøj skal man altså først udpege centrum **C** og toppunkt **T** og dernæst et tredje punkt **P**, der ligger på ellipsen. Specielt skal det altså ligge indenfor den vinkelrette stribe frembragt af akse i ellipsen, dvs. forbindelseslinjen mellem toppunktet og det modsatte toppunkt. Punkterne kan vælge frit eller afsættes oveni allerede konstruerede punkter. Mens toppunktet **T** afsættes, vises også det modsatte toppunkt. Derefter kan man se hele ellipsekonstruktionen inklusive de fire toppunkter, mens man afsøger placeringen af det tredje punkt **P**:



Da man har de fire toppunkter til rådighed er det nemt at forsyne ellipsen med halvakser. Det er også nemt – som vist – at konstruere de tilhørende brændpunkter, hvis det ønskes. Cirklen med centrum i **U** og den halve storakse **a** som radius skærer nemlig storaksen i brændpunkterne **F₁** og **F₂**.

Endelig kan vi kort se på konstruktionen af en ellipse indskrevet i et rektangel:

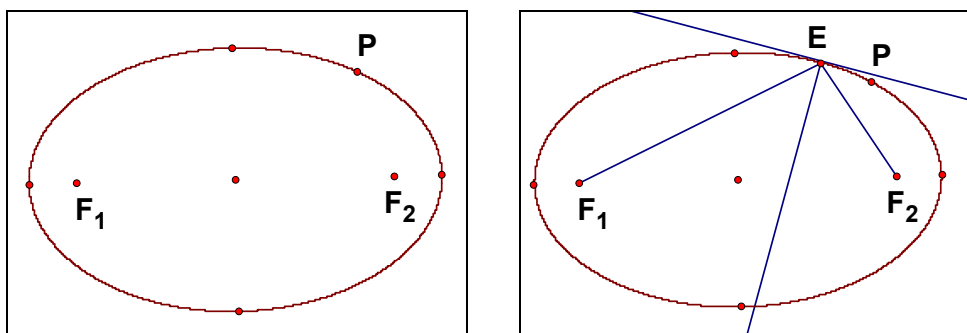


Diagonalerne skærer hinanden i ellipsens centrum, mens sidernes midtpunkter bliver ellipsens toppunkter. Vi vælger derfor ellipseværktøjet og udpeger centrum og to af toppunkterne som midtpunkter for rektanglets to sider.

Konstruktion af en ellipsetangent kan fx nemt udføres ud fra ellipsens omskrevne cirkel som beskrevet i hæftet: **De centrale keglesnit med GeoMeter**. Se også afsnittet med **Konstruktioner med ellipser**.

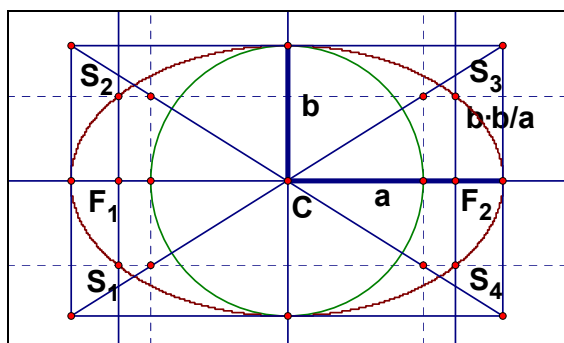
2. Ellipse 3pkt: $F_1 - F_2 - P$ (To brændpunkter – Randpunkt)

Vi ser dernæst på ellipsen defineret ud fra sine **brændpunkter**. Vi vil da typisk have brændpunkterne stillet til rådighed. Dertil kommer så endnu et tilfældigt punkt på ellipsen, der selvfølgelig godt kan vælges som et af toppunkterne. Når man vælger dette værktøj skal man altså først udpege brændpunkterne F_1 og F_2 og dernæst et tredje punkt P , der ligger på ellipsen. Punkterne kan vælges frit eller afsættes oveni allerede konstruerede punkter. Mens det andet brændpunkt F_2 afsættes, vises også centrum C for ellipsen. Derefter kan man se hele ellipsekonstruktionen inklusive de fire toppunkter, mens man afsøger placeringen af det tredje punkt P :

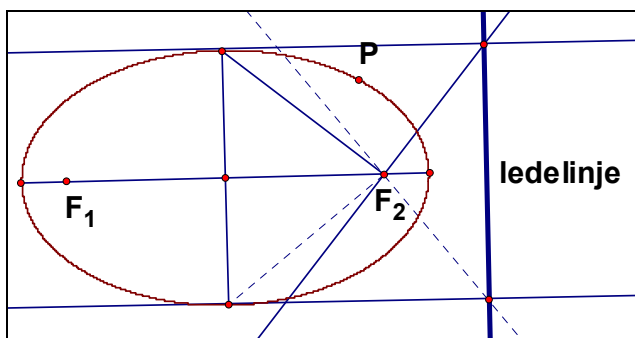


Det er nemt at konstruere en tangent til et ellipsepunkt E ud fra brændpunkterne, idet tangenten jo halverer vinklen mellem brændstrålerne F_1E og F_2E . Først udpeges punkterne F_1 , E og F_2 og man kan konstruere vinkelhalveringslinjen, der jo er normal til tangenten. Dernæst konstrueres tangenten som den vinkelrette gennem ellipsepunktet E .

Hvis vi have fat i ellipsens **skulderpunkter**, dvs. ellipsepunkterne vinkelret på brændpunkterne kan man selvfølgelig gå omvejen over den omskrevne cirkel, men man kan også udnytte at skulderpunktets højde p (den såkaldte semilatus rectum) er givet ved $p = b^2/a = b \cdot b/a$. Højden er altså netop fladtrykningen af den halve lilleakse:



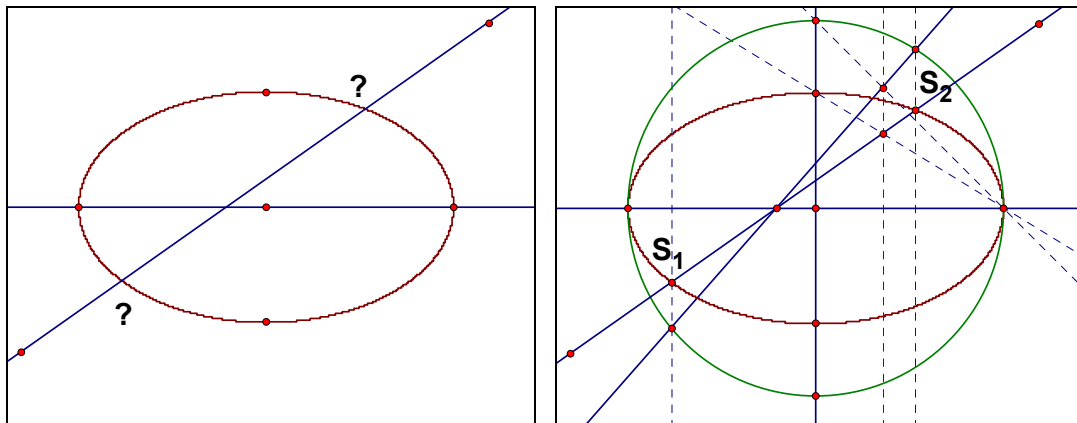
Hvis vi endelig vil have fat i ellipsens **ledelinje** kan vi fx udnytte at normalen til en brændstråle gennem brændpunktet skærer tangenten på ledelinjen. Her er det særligt nemt at gå ud fra lilleaksens toppunkter, hvis tangenter jo er parallelle med storaksen.



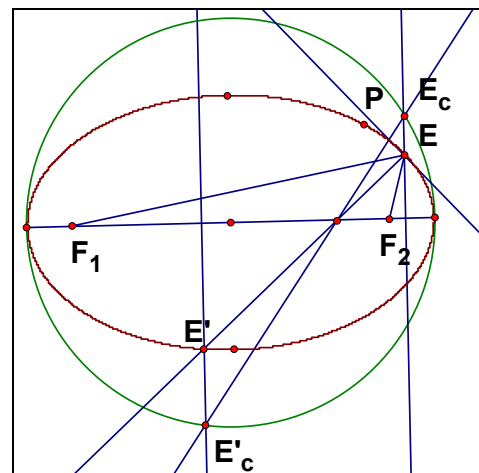
Konstruktioner med ellipser

Ved konstruktioner med ellipser kan man med fordel tage udgangspunkt i ellipsen som en fladtrykt cirkel. Ved at 'puste' ellipsen op til en cirkel omdannes problemet til et cirkelproblem, der typisk er nemt at løse, hvorefter løsningen fladtrykkes og derved kommer til at virke for ellipsen.

Skal vi fx konstruere skæringspunkter mellem en ret linje og en ellipse 'puster' vi såvel ellipsen som linjen op. Her er det en fordel at bemærke at skæringen med storaksen er et fikspunkt, som ligger stille under oppustningen. Derefter konstrueres skæringspunkterne med cirklen. Til sidst fladtrykkes konstruktionen og vi har fået konstrueret skæringspunkterne med ellipsen:



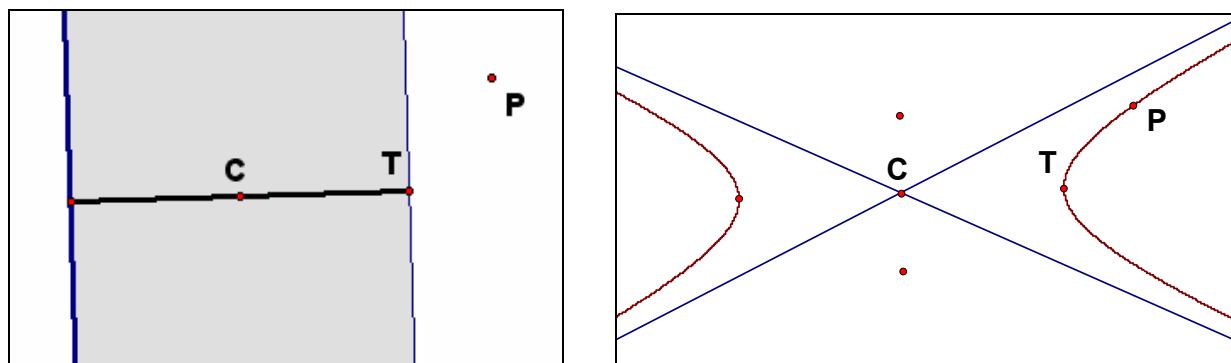
Givet et ellipsepunkt \mathbf{E} er det – som vi har set – rimeligt simpelt at konstruere normalen gennem \mathbf{E} . Det er noget mere tricket at konstruere normalens andet skæringspunkt \mathbf{E}' med ellipsen. Her kan det også – som vist – betale sig at benytte ellipsens omskrevne cirkel og støtte sig til det associerede cirkelpunkt \mathbf{E}_c . Linjen $\mathbf{E}_c\mathbf{E}'_c$ går nemlig ved fladtrykningen over i normalen og må derfor specielt skære normalen på ellipsens storakse i et fikspunkt. Det gør det muligt at konstruere cirkelpunktet \mathbf{E}'_c . Det tilhørende ellipsepunkt \mathbf{E}' fås da nemt som skæringen mellem ellipsenormalen og den vinkelrette linje gennem \mathbf{E}'_c der står vinkelret på fladtrykningsaksen.



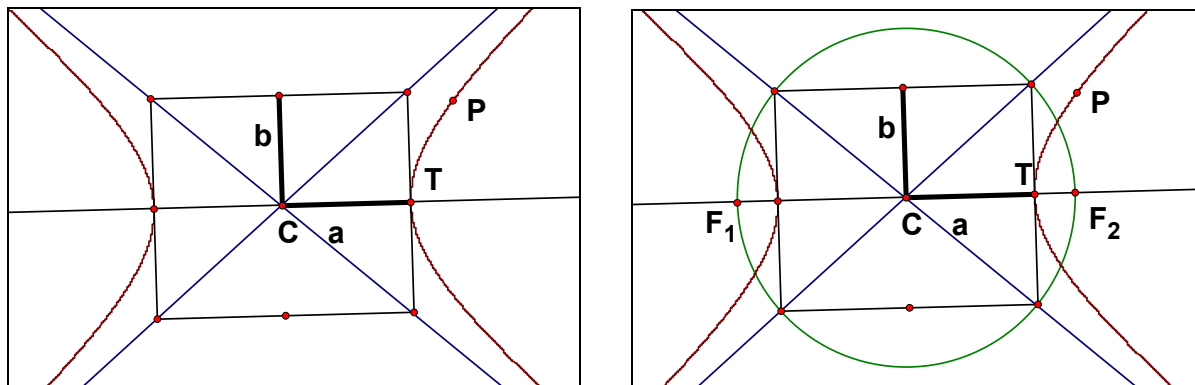
På samme måde er det nemt at konstruere tangenter til en ellipse gennem et ydre punkt \mathbf{Q} . Først 'pustes' ellipsen op til en cirkel og vi 'puster' tilsvarende det ydre punkt op til \mathbf{Q}' . Dernæst konstrueres tangenterne til cirklen gennem \mathbf{Q}' . Endelig trykkes cirkeltangenterne flade igen så de bliver til de søgte ellipsetangenter gennem det ydre punkt \mathbf{Q} . På denne måde kan man fx håndtere poler og polarer i forbindelse med ellipser.

3. Hyperbel 3pkt: C – T – P (Centrum – Toppunkt – Randpunkt)

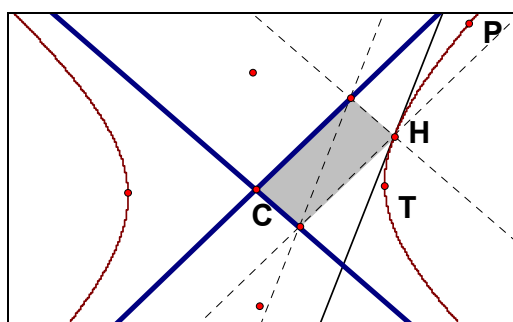
Vi ser først på hyperblen defineret ud fra sit **centrum** og sine **halvaksler**. Vi vil da typisk have centrum og et **toppunkt** til rådighed. Dertil kommer så endnu et tilfældigt punkt på hyperblen. Når man vælger dette værktøj skal man altså først udpege centrum **C** og toppunkt **T** og dernæst et tredje punkt **P**, der ligger på hyperblen. Specielt skal det altså ligge **udenfor** den vinkelrette stribe frembragt af akserne i hyperblen, dvs. forbindelseslinjen mellem toppunktet og det modsatte toppunkt. Punkterne kan vælges frit eller afsættes oveni allerede konstruerede punkter. Mens toppunktet **T** afsættes, vises også det modsatte toppunkt. Derefter kan man se hele hyperbelkonstruktionen inklusive **asymptoter** og de fire **toppunkter**, mens man afsøger placeringen af det tredje punkt **P**:



Da man har de fire toppunkter til rådighed er det nemt at forsyne hyperblen med halvaksler. Det er også nemt at konstruere de tilhørende brændpunkter. Cirklen, der er omskrevet det omskrevne rektangel skærer nemlig storaksen i brændpunkterne **F₁** og **F₂**.

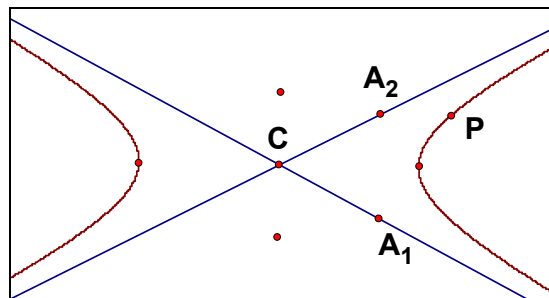


Hvis man vil konstruere en tangent til et hyperbelpunkt **H** kan man udnytte at tangenten er parallel med diagonale i det parallelogram, der fremkommer, når man trækker paralleller til asymptoterne gennem **H**, jfr. diskussionen af hyperbeltangenter i hæftet: **De centrale keglesnit med GeoMeter**.



4. Hyperbel 4pkt: **C** – **A1** – **A2** – **P** (Centrum – To asymptotepunkter – Randpunkt)

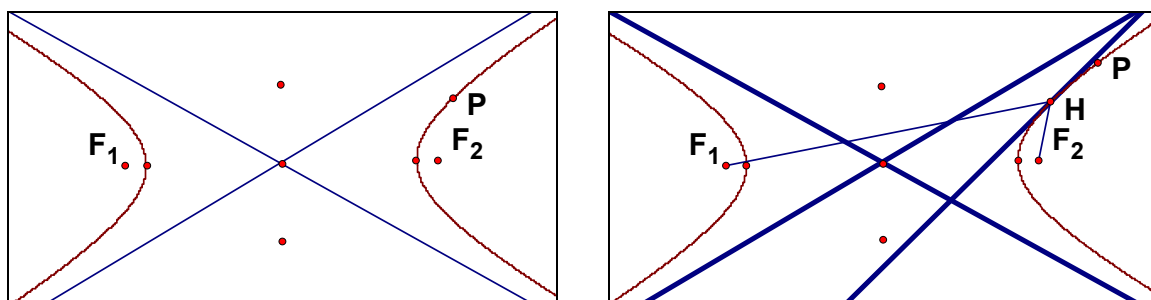
Vi ser så på hyperblen defineret ud fra sit **centrum** og sine **asymptoter**. Vi vil da typisk have centrum og asymptoterne til rådighed. Dertil kommer så endnu et tilfældigt punkt på hyperblen. Når man vælger dette værktøj skal man altså først udpege centrum **C**, dernæst to ankerpunkter for asymptoterne og endelig et fjerde punkt **P**, der ligger på hyperblen. Punkterne kan vælge frit eller afsættes oveni allerede konstruerede punkter. Så snart man har afsat centrum dukker asymptoterne op en for en, mens man afsøger placeringen af asymptotepunkterne **A1** og **A2**. Til sidst kan man se hele hyperbelkonstruktionen inklusive **asymptoterne** og de fire **toppunkter**, mens man afsøger placeringen af det fjerde punkt **P**:



Bemærkning: Hvis det fjerde punkt afsættes på en af asymptoterne, fås en degenereret hyperbel, der blot består af de to asymptoter.

5. Hyperbel 3pkt: **F1** – **F2** – **P** (To brændpunkter – Randpunkt)

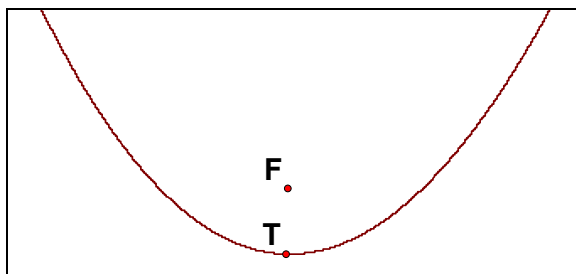
Vi ser dernæst på hyperblen defineret ud fra sine **brændpunkter**. Vi vil da typisk have brændpunkterne stillet til rådighed. Dertil kommer så endnu et tilfældigt punkt på hyperblen, der selvfølgelig godt kan vælges som et toppunkt. Når man vælger dette værktøj skal man altså først udpege brændpunkterne **F1** og **F2** og dernæst et tredje punkt **P**, der ligger på hyperblen. Punkterne kan vælge frit eller afsættes oveni allerede konstruerede punkter. Mens det andet brændpunkt **F2** afsættes, vises også centrum **C** for hyperblen. Derefter kan man se hele hyperbelkonstruktionen inklusive de fire toppunkter, mens man afsøger placeringen af det tredje punkt **P**:



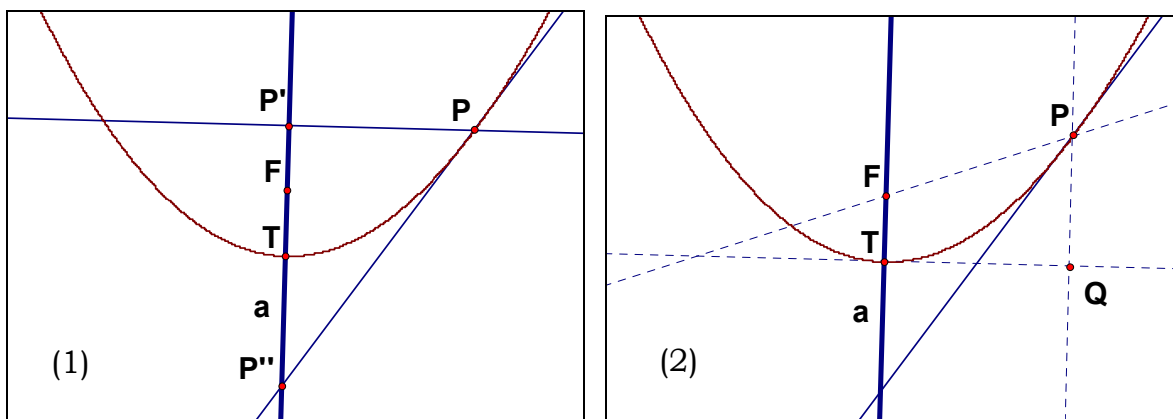
Det er nemt at konstruere en tangent til et hyperbelpunkt **H** ud fra brændpunkterne, idet tangenten jo halverer vinklen mellem brændstrålerne **F1H** og **F2H**. Først udpeges punkterne **F1**, **H** og **F2** og man kan konstruere vinkelhalveringslinjen, der netop er rettet langs tangenten. Dernæst konstrueres tangenten som parallellen til vinkelhalveringslinjen gennem hyperbelpunktet **H**.

6. Parabel 2pkt: F – T (Brændpunkt – Toppunkt)

Dette er standardkonstruktionen af en parabel du fra dens brændpunkt og ledelinje. Når vi har fastlagt brændpunkt og toppunkt, har vi nemlig også fastlagt parablens akse. Da ledelinjen står vinkelret på akse og skærer akse dobbelt så langt ude som toppunktet er det nemt at færdiggøre konstruktionen. Når man vælger dette værktøj skal man altså først udpege brændpunktet **F** og dernæst udpege toppunktet **T**. Parablen fremkommer som sædvanlig under udpegningen af toppunktet **T**:

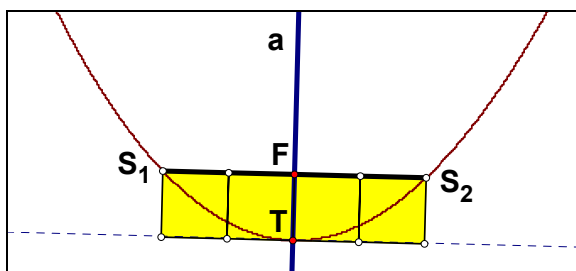


Får man brug for fx en **parabeltangent** må man forsyne parabeln med dens akse og fx udnytte at parabeltangenten 'afskærer' lige store stykker **TP'** og **TP''** på hver sin side af toppunktet. Her fremkommer P' ved en vinkelret projektion ind på parablens akse (1):



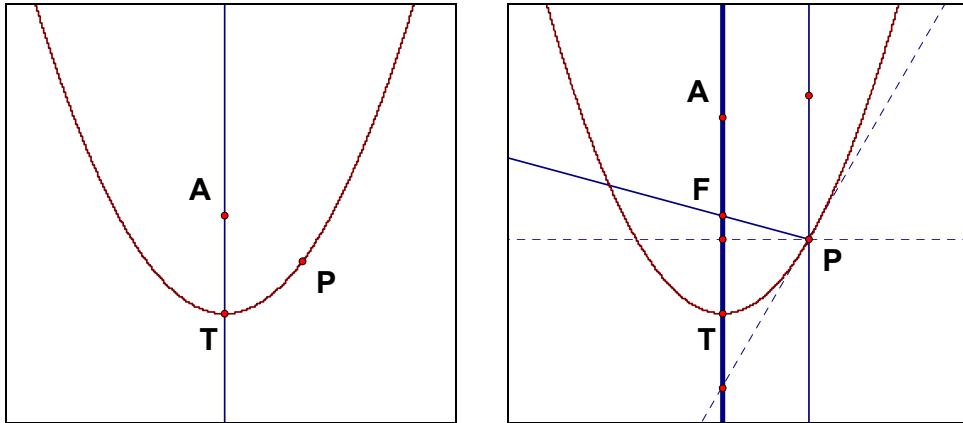
Men man kan selvfølgelig udnytte spejlingsegenskaben (2): Tangenten halverer netop vinklen mellem brændstrålen **FP** og akseparallelle **QP**. Her er **Q** et hjælpepunkt på akseparallelle. Udvalges punkterne **F**, **P** og **Q** kan vi derfor konstruere vinkelhalveringslinjen, der netop har tangentens retning, og dernæst tangenten selv som den linje gennem **P**, der er parallel med vinkelhalveringslinjen.

Får man endelig brug for parablens **skulderpunkter S₁** og **S₂** tager man udgangspunkt i kvadrater med siden **FT**:



7. Parabel 3pkt: T – A – P (Toppunkt – Aksepunkt – Randpunkt)

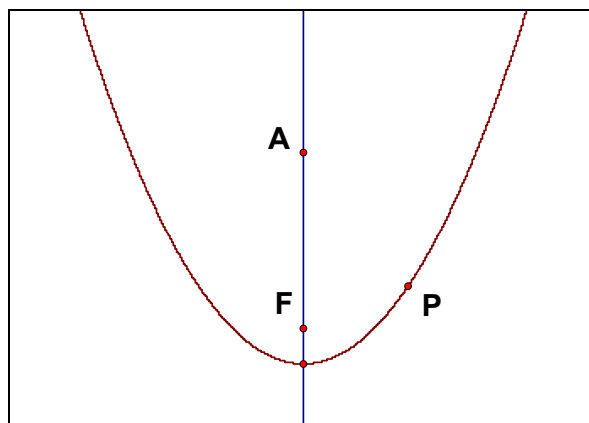
Vi ser dernæst på konstruktioner, hvor vi kun har det ene af de karakteristiske punkter til rådighed, her **toppunktet T**. Vi må da også have kendskab til akse gennem et aksepunkt **A** og yderligere et randpunkt **P** på parabeln. Det fastlægger parabeln fuldstændigt ud fra en **kvadratisk proportionalitet**. Placeres et tænkt koordinatsystem med begyndelsespunkt i toppunktet **T** og akse som **y**-akse får parabeln nemlig ligningen $y = k \cdot x^2$, dvs. **y** og x^2 er proportionale. Det gør det nemt at konstruere parabeln som et geometrisk sted. For detaljer kan man læse i det kommende hæfte 'Parabeln med Geometer'. Så snart man har afsat toppunktet viser akse sig under udvælgelsen af aksepunkt. Dernæst viser parabeln sig under udvælgelse af randpunktet:



Får man brug for **brændpunktet F** kan dette konstrueres ret nemt, fx ved at ud fra spejlingsegenskaben ved at udnytte at en akseparallel stråle passerer gennem brændpunktet efter at være blevet spejlet i tangenten.

8. Parabel 3pkt: F – A – P (Brændpunkt – Aksepunkt – Randpunkt)

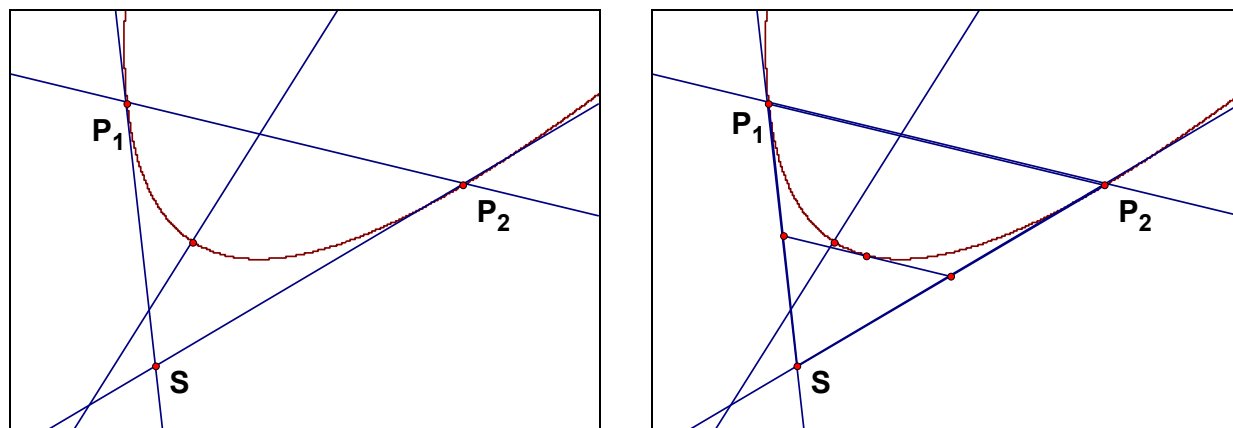
Dette er den tilsvarende konstruktion, hvor vi denne gang har **brændpunktet F** til rådighed. Vi må da også have kendskab til akse gennem et aksepunkt **A** og yderligere et randpunkt **P** på parabeln. Det fastlægger parabeln fuldstændigt. Så snart man har afsat brændpunktet viser akse sig under udvælgelsen af aksepunkt. Dernæst viser parabeln inklusive sit toppunkt sig under udvælgelse af randpunktet:



9. Parabel 3pkt: $P_1 - P_2 - S$ (To Randpunkter – Tangenternes skæringspunkt)

Endelig kigger vi på en mere generel parabelkonstruktion. Parablen er et meget specielt keglesnit midtvejs mellem ellipsen og hyperblen. Der findes kun én parabelform, idet alle parabler er ligedannede. Parablen er derfor sin egen form lige som cirklen. Parablen har én bestemt excentricitet – nemlig 1 – i modsætning til ellipsen, der kan have alle mulige excentriciteter mellem 0 og 1 eller hyperblen, der kan have alle mulige excentriciteter over 1. Men behøver derfor kun fire oplysninger for at kunne rekonstruere en parabelform, i modsætning til ellipser og hyperbler, hvor fem oplysninger er nødvendige, jfr. det næste værktøj. Man kan dog ikke specificere en parabel fuldstændigt ved hjælp af fire punkter, idet to parabler i almindelighed vil skære hinanden i fire punkter, så der går ikke en entydig parabel gennem fire forelagt punkter. I stedet viser det sig at være simpelt at konstruere parabelbuer baseret på to røringpunkter med tilhørende tangenter. Man kan derfor specificere en parabelbue ved at anføre en trekant ABC , hvor parablen tangerer trekanten i de to hjørner A og B . Siderne AC og BC fungerer altså som parabeltangenter. Konstruktionen er baseret på en simpel egenskab ved parabeltangenter og ligger til grund for en simpel teknik med at 'sy parabler'. For detaljer kan vi fx igen henvise til det kommende hæfte '**Parablen med GeoMeter**'.

Når man benytter dette værktøj udpeger man altså de to parabelpunkter P_1 og P_2 og dernæst tangenternes skæringspunkt S . Når det første parabelpunkt er afsat vises forbindelseslinjen (trekantens grundlinje) til det andet parabelpunkt. Dernæst vises hele parablen inklusive **toppunkt**, **akse** og de to tangenter, mens skæringspunktet S afsøges:



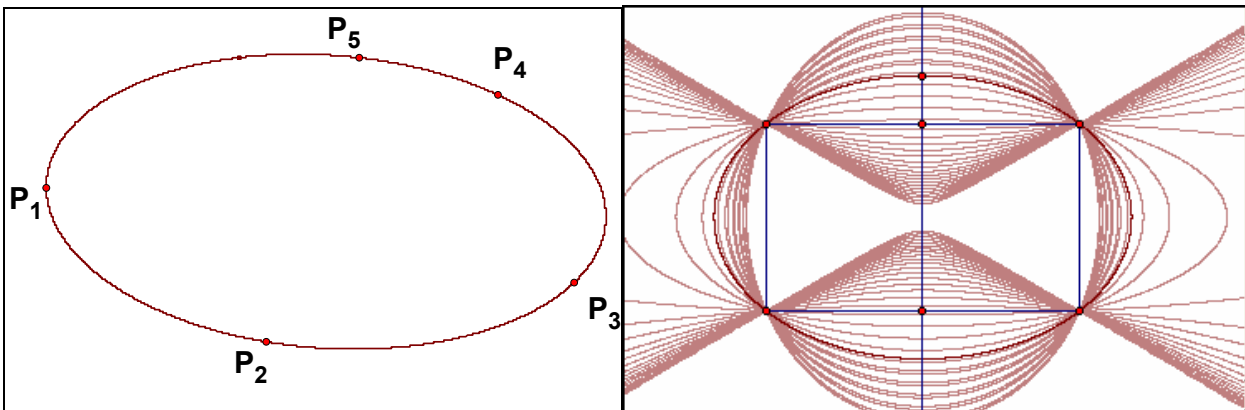
Midtpunktstransversalen til grundlinjen P_1P_2 er igen en tangent til parablen med midtpunktet som røringpunkt. Denne proces kan nu fortsættes iterativt og giver anledning til en berømt approksimation af parabelbuen med trekantsider, der ligger til grund for fx Arkimedes berømte karakterisering af arealet udspændt af parabelbuen som værende $2/3$ af arealet af trekanten P_1P_2S .

Bemærkning: Medianen fra S er parallel med parablens akse. Da tangenten i toppunktet står vinkelret på akse kender vi derfor toppunktstangentens retning. Det giver anledning til den simple konstruktion af toppunktet og dermed af parablens akse, som netop er indbygget i det ovenstående værktøj.

10. Keglesnit 5 pkt: P1 – P2 – P3 – P4 – P5 (Fem Randpunkter)

Den almene keglesnitskonstruktion bygger på karakteriseringen af et keglesnit som det geometriske sted for de punkter, hvorfra man ser fire punkter under et fast dobbeltforhold. Det kræver derfor fem punkter at fastlægge et alment keglesnit: Fra det ene af de fem punkter ses nemlig de fire øvrige punkter under et bestemt dobbeltforhold. Selve konstruktionen er i øvrigt baseret på Pascals sætning om indskrevne sekskanter i et keglesnit.

Når man benytter dette værktøj skal man altså vælge/afsætte fem punkter. Når de første fire punkter er afsat fremkommer keglesnittet mens man afsøger placeringen af det femte punkt. På den måde kan man fx som vist spore familien af keglesnit gennem hjørnerne i en firkant:



Den almene keglesnitskonstruktion benyttes især, når man mangler oplysninger om akser og brændpunkter. Hvis der fx er givet en trekant **ABC** og et vilkårligt punkt **S**, så vil forbindelseslinjerne **SA**, **SB** og **SC** skære trekantsiderne i fodpunkterne **a_s**, **b_s** og **c_s**. Hertil kommer midtpunkterne **M_a**, **M_b** og **M_c** for de tre trekantsider. Tilsvarende kan vi konstruere midtpunkterne for forbindelsesstykkerne **AS**, **BS** og **CS**. Disse ni punkter vil da som vist ligge på et keglesnit **K_S**. Man kan så fx undersøge, hvorledes dette keglesnit afhænger af placeringen af **S**.

