

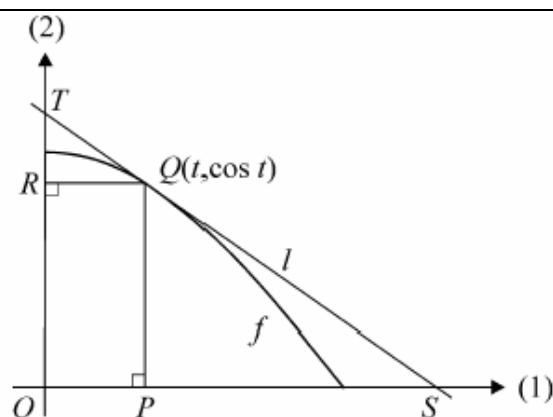
Some like it HOT: Højere Ordens Tænkning med CAS

Bjørn Felsager, Haslev Gymnasium & HF, 2001

I år er det første år, hvor CAS-forsøget er et standardforsøg og alle studenterksamensopgaverne derfor foreligger i to varianter: Den almindelige variant, der skal løses med en grafregner, og så CAS-varianten, der skal løses med et CAS-værktøj, dvs. et computer-algebra-system. På Haslev Gymnasium og HF har vi netop i år skiftet til CAS-forsøget for de nye matematikerklasser. Vi var derfor selvfølgelig spændt på at se variationerne fra de almindelige sæt til CAS-sættene, om end det jo først er fra næste sommereksamen at vores elever selv kommer i ilden.

Opgave 7a

(ca. 15 point)



Figuren viser i et koordinatsystem med begyndelsespunkt O grafen for funktionen f givet ved

$$f(x) = \cos x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

For ethvert tal $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ er $Q(t, \cos t)$ et punkt på grafen for f . Idet P og R betegner projektionerne af Q på henholdsvis første- og andenaksen, er firkant $OPQR$ et rektangel med arealet $A(t) = t \cdot \cos t$.

Benyt grafregneren til at bestemme den værdi af t , for hvilken arealet af rektangleret er størst muligt.

Bestem for $t = \frac{\pi}{3}$ en ligning for tangenten til grafen for f i punktet Q .

For ethvert tal $t \in]0; \frac{\pi}{2}[$ betegner l tangenten til grafen for f i punktet Q . Tangenten skærer førsteaksen i punktet S og andenaksen i punktet T .

Gør rede for, at arealet $B(t)$ af trekant OST kan skrives som

$$B(t) = \frac{1}{2} \left(t + \frac{\cos t}{\sin t} \right) (\cos t + t \sin t).$$

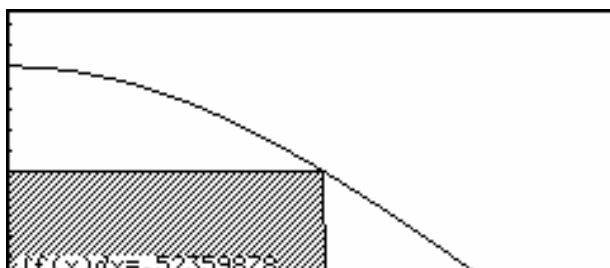
Benyt grafregneren til at bestemme den værdi af t , for hvilken $B(t)$ er mindst mulig.

Samtidigt indeholder årets sæt en af de smukke eksamensopgaver, der kan danne afsæt for et symbolsk matematikprojekt – på samme måde som mangen en fysikopgave i årenes løb har dannet afsæt for et eksperimentelt fysikprojekt.

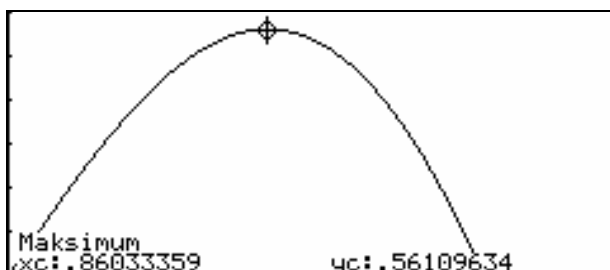
Det er endda ikke engang en egentlig CAS-opgave, idet den er formuleret, så man kan skyde sig igennem med en grafregner. Det drejer sig om den valgfrie opgave 7a fra sættet til det 3-årige forløb til A-niveau, hvor man skal maksimere arealet af det indskrevne rektangel, henholdsvis minimere arealet af den omskrevne trekant, til grafen for en cosinusfunktion på det første stykke i første kvadrant. Opgaven indeholder imidlertid en smuk overraskelse, idet det viser sig, at de to arealer har et fælles ekstremumssted – og så kan man jo ikke lade være med at undre sig: Hvorfor nu det?

Det gælder om at holde hovedet koldt ...

Lad os starte med at løse opgaven sådan omtrent som man ville gøre det med en grafregner. De ligninger, der skal løses undervejs, kan alligevel ikke løses eksakt. Hvis vi kigger på grafpunktet $(t, \cos(t))$, så er arealet $A(t)$ for det *indskrevne rektangel* åbenbart givet ved $A(t) = t \cdot \cos(t)$. Vi kan nemt illustrere grafen for cosinusfunktionen med et indskrevet rektangel (fx for t -værdien $\pi/3$):



Tilsvarende kan vi nemt tegne grafen for arealfunktionen $A(x) = x \cdot \cos(x)$ og finde maksimumsstedet grafisk. Det maksimale areal for det indskrevne rektangel findes altså i $x \approx 0.86033359$ og størrelsen af det maksimale areal er givet ved $A_{\max} \approx 0.56109634$ (alt sammen med den usikkerhed, der nu er forbundet med de grafiske rutiner):



Men nu har vi jo en symbolsk lommeregner til rådighed, så det er heller ikke svært at løse opgaven symbolsk ved at differentiere arealfunktionen og så bestemme nulpunktet for den første afledede numerisk (da den fremkomne ligning ikke kan løses symbolsk). Fortegnet for den anden afledede viser netop, at der er tale om et lokalt maksimum (og grafen viser så, at der rent faktisk er tale om et globalt maksimum i intervallet $[0; \pi/2]$):

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Andet F4 PrgmIO F5 Ryd op
■  $\frac{d}{dt}(a(t))$   $\cos(t) - t \cdot \sin(t)$ 
■  $\text{løs}(\cos(t) - t \cdot \sin(t) = 0, t) \mid 0 < t \text{ and } t < \frac{\pi}{2}$ 
 $t = .86033359$ 
■  $a(t) \mid t = .86033358901938$   $.56109634$ 
■  $\frac{d^2}{dt^2}(a(t)) \mid t = .86033358901938$ 
 $-2.0772167$ 
 $d(a(t), t, 2) \mid t = .86033358901938$ 
MAIN RAD AUTO FKT 5/30

```

Vi går så over til at se nærmere på den *omskrevne trekant*. Hertil får vi brug for tangentligningen for tangenten med røringsspunkt i grafpunktet $(t, \cos(t))$, så vi kan beregne skæringspunkterne med akserne. Men her kan vi jo benytte taylorkommandoen:

```

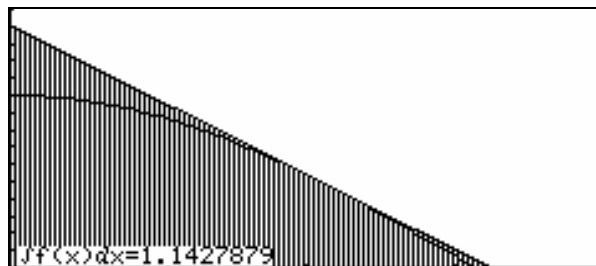
■  $y = \text{taylor}(\cos(x), x, 1, t)$ 
 $y = \cos(t) - (x - t) \cdot \sin(t)$ 
■  $\text{løs}(y = \cos(t) - (x - t) \cdot \sin(t), y) \mid x = 0$ 
 $y = \cos(t) + t \cdot \sin(t)$ 
■  $\text{løs}(y = \cos(t) - (x - t) \cdot \sin(t), x) \mid y = 0$ 
 $x = \frac{\cos(t) + t \cdot \sin(t)}{\sin(t)}$ 
■  $1/2 \cdot x \cdot y \mid x = \frac{\cos(t) + t \cdot \sin(t)}{\sin(t)}$  and  $y = \cos(t) + t \cdot \sin(t) \rightarrow b(t)$ 
Udført
■  $b(t)$   $\frac{(\cos(t) + t \cdot \sin(t))^2}{2 \cdot \sin(t)}$ 

```

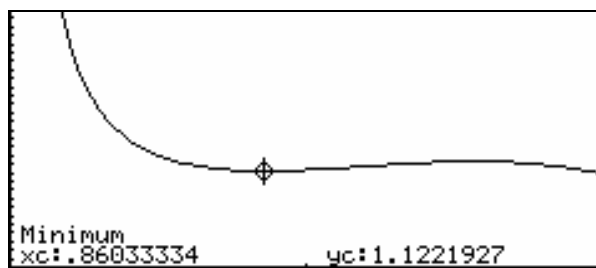
Arefunktionen for den omskrevne trekant er altså givet ved

$$b(t) = \frac{(\cos(t) + t \cdot \sin(t))^2}{2 \cdot \sin(t)}$$

Det er noget simplere end det udtryk, der foreslås i opgaveteksten, men det er nu ikke svært at vise, at de er ækvivalente. Som før kan vi illustrere grafen for cosinusfunktionen med et indskrevet rektangel (igen for $t = \pi/3$):



Tilsvarende kan vi nemt tegne grafen for arealfunktionen $B(x)$ og finde minimumsstedet grafisk:



Og her kommer så overraskelsen: Det minimale areal for den omskrevne trekant findes i $x \approx 0.86033334$ (og størrelsen af det minimale areal er givet ved $B_{\min} \approx 1.1221927$). Det ligner unægtelig det tidligere fundne maksimumssted for $A(t)$ så meget, at de i virkeligheden godt kunne være ens! Det kan vi bare ikke eftervise ved en numerisk rutine, for uanset hvor mange decimaler de to steder synes at have fælles kan de næste decimaler skille dem ad.

Det giver umiddelbart et problem: For løsningen på ekstremumsproblemet er *ikke* eksakt, da vi netop ender med en ligning, $\cos(t) = t \cdot \sin(t)$, der *ikke* kan løses symbolsk. Her gælder det derfor om at holde hovedet koldt: Selv om vi ikke kan løse ligningen eksakt kan vi rent faktisk godt checke ved en symbolsk udregning, om de to problemer fører til den samme ligning. Vi differentierer derfor $B(t)$ og ser, hvad der sker:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(b(t)) \\ & \frac{-\cos(t) \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t)) \cdot (\cos(t) - t \cdot \sin(t))}{2 \cdot (\sin(t))^2} \\ & \text{■ løs} \left\{ \frac{-\cos(t) \cdot (\cos(t) + t \cdot \sin(t)) \cdot (\cos(t) - t \cdot \sin(t))}{2 \cdot (\sin(t))^2} = 0, t \mid 0 < t \text{ and } t < \frac{\pi}{2} \right. \\ & \quad \left. \cos(t) + t \cdot \sin(t) = 0 \text{ or } t = .86033359 \right. \end{aligned}$$

Jo, der dukker præcis den samme faktor, $\cos(t) - t \cdot \sin(t)$, op i den afledede for $B(t)$. Og de andre faktorer har konstant fortegn i intervallet $]0; \pi/2[$. Det er godt nok ikke noget, som maskinen kan overskue, så den advarer om, at der principielt kan være flere løsninger. De skulle i så fald komme fra den anden ligning, $\cos(t) = -t \cdot \sin(t)$. Men vi ved bedre!

Der skete altså faktisk et mirakel: Maksimumsstedet og minimumsstedet falder sammen. Spørgsmålet er så om det er et tilfælde, som skyldes særlige omstændigheder ved cosinusfunktionen eller om det er et alment fænomen, som i en vis forstand vil indtræffe for alle funktioner, hvor problemstillingen giver mening. Det er her muligheden opstår for at udfordre eleverne med et projekt: Undersøg sammenhængen mellem det største indskrevne areal og det mindste omskrevne areal for grafen til en differentiabel funktion.

Tampen brænder ...

Vi er vant til de kognitive problemer elever har med at forstå funktionsbegrebet: Overgangen fra at beregne en konkret værdi for et areal til at betragte sammenhængen mellem arealet og grafpunktets x -koordinat som et konkret objekt, en arealfunktion man kan manipulere, er et stort kognitivt skridt.

Men til sidst lærer de at mestre håndteringen af sådanne konkrete funktioner, på samme måde som de lærte at håndtere først tal, og dernæst variable. Men ovenpå dette trin findes endnu et lag, hvor man i stedet for at arbejde med konkrete funktioner, fx $\cos(x)$, betragter vilkårlige abstrakte funktioner, dvs. $f(x)$, $g(x)$ osv. som objekter, man kan manipulere.

Computeralgebrasystemer har det ligesom eleverne bedst med konkrete funktioner: Dem kan de uden videre differentiere symbolsk, og de er også ret gode til at integrere dem symbolsk henholdsvis til at udregne konkrete grænseværdier symbolsk. Men når det kommer til at håndtere abstrakte funktioner skiller vandene. Det går så nogenlunde med differentiation, men så snart vi kommer til fx de symbolske grænseovergange er der stor forskel, på hvad et lille system som Derive henholdsvis et stort system som fx Maple kan præstere. Men her vil vi kun kigge på differentiation, og der kan Derive godt følge med. Vi kan altså også bruge CAS-systemerne til at assistere eleverne med at manipulere med abstrakte funktioner og dermed hjælpe dem med at udvikle Højere Ordens Tænkning om funktioner. Det er her, tampen brænder!

Til det formål har vi brug for et projekt, hvor eleverne kan gå på udforskning i en matematisk problemstilling med abstrakte funktioner, hvor de selv kan prøve at afklare, hvad der gælder i den pågældende problemstilling. Det er her årets opgave kommer som sendt fra himlen. Lad os prøve at skitsere, hvad der kunne komme ud af et sådant projekt. Vi skal altså have løftet problemstillingen med de indskrevne og omskrevne figurer til grafen for en funktion, der blot i grove træk opfører sig som en cosinus funktion. Som eksempler på sådanne funktioner kan vi foruden *cosinusfunktionerne*

$$f(x) = y_0 \cdot \cos\left(\frac{x}{x_0} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

se på *parabelfunktioner* af typen

$$g(x) = y_0 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right)$$

og *ellipsefunktioner* af typen

$$h(x) = y_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}},$$

alle med x_0 og y_0 som værende positive parametre, der angiver skæringerne med de to akser.

En simpel aktivitet kan bestå i at undersøge problemstillingen for andre funktioner end cosinusfunktionen fx de to sidstnævnte. Hvis vi giver parametrene konkrete værdier (som i eksamensopgaven) bør alle kunne være med i dette første trin. Men mange vil også kunne håndtere variable parametre i funktionerne (hvilket udelukker grafisk analyse) – en kompetence, der jo netop dyrkes meget i eksamenskommissionens CAS-opgaver.

For elever med sans for højere ordens tænkning er det imidlertid de abstrakte funktioner, der blot ligner cosinusfunktionen, der skal undersøges. Vi må så først præcisere, hvad det vil sige at en abstrakt funktion opfører sig på samme måde som cosinus-funktionen. I et projekt skal det selvfølgelig være et åbent spørgsmål, men lad os give et bud og tænke os, at vi er kommet frem til de følgende krav for funktionen f :

- 1) Funktionen f er defineret på et interval af formen $[0; x_0]$ som afbildes aftagende på et interval af formen $[0; y_0]$, hvor x_0 og y_0 er positive reelle tal, dvs. der gælder specielt $f(0) = y_0$ og $f(x_0) = 0$.
- 2) Funktionen f er vilkårligt ofte differentiabel i det indre af definitionsintervallet $]0; x_0[$ hvor såvel f' som f'' er negative.

Det første krav – at f' er negativ i det indre af intervallet – er selvfølgelig i overensstemmelse med at f er aftagende på intervallet, mens det andet krav tilsvarende udtrykker at grafen er nedad hul i intervallet.

I forbifarten bemærker vi, at de tre funktionseksempler også viser, at vi intet kan sige om fortegnet for den tredje afledede, idet den tredje afledede er positiv for cosinusfunktionen, forsvinder identisk for parabelfunktionen, mens den er negativ for ellipsefunktionen.

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(y_0 \cdot \cos \left(\frac{x}{x_0} \cdot \pi \right) \right) = \frac{y_0 \cdot \pi^3 \cdot \sin \left(\frac{\pi \cdot x}{2 \cdot x_0} \right)}{8 \cdot x_0^3}$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(y_0 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right) \right) = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^3}{dx^3} \left(y_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{x_0^2}} \right) \\ & \frac{2 \cdot \left| \frac{1}{x_0} \right| \cdot y_0 \cdot x}{(x^2 - x_0^2) \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}} - \frac{\left| \frac{1}{x_0} \right| \cdot y_0 \cdot x}{(x_0^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{3 \cdot \left| \frac{1}{x_0} \right| \cdot y_0 \cdot x^3}{(x_0^2 - x^2)^{5/2}} \\ & \text{fællesnev} \left(\frac{2 \cdot \left| \frac{1}{x_0} \right| \cdot y_0 \cdot x}{(x^2 - x_0^2) \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}} - \frac{\left| \frac{1}{x_0} \right| \cdot y_0 \cdot x}{(x_0^2 - x^2)^{3/2}} - \frac{3 \cdot \left| \frac{1}{x_0} \right| \cdot y_0 \cdot x^3}{(x_0^2 - x^2)^{5/2}} \right) \\ & \frac{3 \cdot x_0^2 \cdot y_0 \cdot x}{(x^2 - x_0^2) \cdot (|x_0^3| - |x_0| \cdot x^2) \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}} \\ & \frac{3 \cdot x_0^2 \cdot y_0 \cdot x}{(x^2 - x_0^2) \cdot (|x_0^3| - |x_0| \cdot x^2) \cdot \sqrt{x_0^2 - x^2}} \Big|_{x_0 > 0} \\ & \frac{-3 \cdot x_0 \cdot y_0 \cdot x}{(x_0^2 - x^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Specielt den tredje afledede af ellipsefunktionen er rimeligt krydret. Det er ikke en differentiation jeg sådan lige klarer på bagsiden af en serviet til morgenbordet. Men jeg er nok også ved at være lidt gammel og synes ikke det er så sjovt at differentiere løs som i mine unge dage!

Cas i ilden ...

Så er vi klar til at undersøge den generelle opførsel af arealet for det indskrevne rektangel henholdsvis arealet for den omskrevne trekant.

Det indskrevne rektangel. Det har selvfølgelig arealet $A(t) = t \cdot f(t)$. Vi finder nu de to første afledede:

F1	F2	F3	F4	F5	F6
←	Algebra	Calc	Andet	PrgmIO	Ryd op
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Definer $a(t) = t \cdot f(t)$ Udført ▪ $\frac{d}{dt}(a(t))$ $\frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t + f(t)$ ▪ $\frac{d^2}{dt^2}(a(t))$ $\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) \cdot t + 2 \cdot \frac{d}{dt}(f(t))$ 					
$\frac{d(a(t), t, 2)$					
MAIN		RAD AUTO		FKT 2/30	

Da $A''(t) = f''(t) \cdot t + 2f'(t)$ ses det, at begge leddene er negative, dvs. den anden afledede er negativ, så grafen for A er nedad hult. Vi ser derfor, at arealfunktionen for det indskrevne rektangel opfører sig ligesom i tilfældet med cosinusfunktion. Specielt er der præcis ét maksimumssted som løser ligningen

$$A'(t) = 0 \quad \text{dvs.} \quad f'(t) \cdot t + f(t) = 0$$

Denne ligning kan i almindelighed *ikke* løses symbolsk, men det afgørende for os er jo også blot at vide, at den har en entydig løsning i det indre af intervallet $]0; x_0[$.

Den omskrevne trekant. Den har arealet $\frac{1}{2}h \cdot g$, og vi skal blot finde et passende udtryk for højden h og grundlinjen g . Vi opskriver derfor tangentligningen. Det kan ikke gøres med taylorkommandoen, da den ikke virker på abstrakte funktioner. Men vi kan sagtens indskrive tangentligningen direkte, fx på den symmetriske form: $y - f(t) = f'(t) \cdot (x - t)$:

▪	$\text{lös} \left(y - f(t) = \frac{d}{dt}(f(t)) \cdot (x - t), y \right) \mid x = 0$ $y = f(t) - \frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t$
▪	$\text{lös} \left(y - f(t) = \frac{d}{dt}(f(t)) \cdot (x - t), x \right) \mid y = 0$ $x = t - \frac{f(t)}{\frac{d}{dt}(f(t))}$
▪	Definer $b(t) = 1/2 \cdot x \cdot y \mid x = t - \frac{f(t)}{\frac{d}{dt}(f(t))}$ and $y = f(t) - \frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t$ Udført
▪	$b(t) = \frac{\left[\frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t - f(t) \right]^2}{2 \cdot \frac{d}{dt}(f(t))}$

Læg mærke til at maskinen selv faktoriserer udtrykket for $B(t)$, og at det direkte af udtrykket fremgår, at $B(t)$ er positiv i det indre af intervallet, idet vi jo har forudsat, at $f'(t)$ er negativ. Derimod behøver trekantarealet ikke være defineret i det venstre endepunkt, idet grafen for f godt kan have en vandret tangent i dette punkt. Det er netop tilfældet for vores tre eksempelfunktioner, hvorfor $B(t)$ får en lodret asymptote på dette sted.

Spørgsmålet er så hvordan trekantarealet opfører sig som funktion. Det kan vi nok nemmest finde ud af ved at beregne den første afledede. For trænede symbolekvilibristere uddannet i fordums tid på Universitetet kan det selvfølgelig sagtens gøres i hånden, men for vore elever er det et rimeligt snasket udtryk, så her er det bestemt rart at få lidt teknisk assistance:

$$\frac{\frac{d}{dt}(b(t)) \cdot \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t + f(t) \right] \cdot \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t - f(t) \right] \cdot \frac{d^2}{dt^2}(f(t))}{2 \cdot \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \right]^2}$$

Læg igen mærke til, hvor pænt udtrykket faktoriseres – og ikke mindst at den første af faktorerne netop er den samme som vi fandt før, da vi differentierede arealfunktionen $A(t)$ for det indskrevne rektangel. Det viser netop at alle nulpunkterne for $A'(t)$ også dukker op som nulpunkter for $B'(t)$. Men faktisk kan vi sige noget mere. De øvrige faktorer har nemlig konstant fortegn, idet der jo åbenlyst gælder at $(f'(t) \cdot t - f(t))$ er negativ i det indre af intervallet $]0; x_0[$. Der er derfor ikke andre nulpunkter end dem der nedarves fra $A'(t)$! Og da $B'(t)$ samlet har det *modsatte fortegn* af $A'(t)$ betyder det, at B netop har et minimumssted hvor A har et maksimumssted. Der må endda være tale om et globalt minimum, da det er det eneste nulpunkt. Dermed har vi vist, hvad vi lovede, nemlig at sammenfaldet mellem maksimumsstedet for det indskrevne rektangel og minimumsstedet for den omskrevne trekant ikke er noget tilfælde: Det er en hel generel egenskab for alle funktioner, der opfører sig 'tilstrækkeligt pænt' i første kvadrant.

Med CAS ved hånden kan vi endda checke fortegnet for den anden afledede af $B(t)$ direkte:

$$\frac{\frac{d^2}{dt^2}(b(t)) \cdot \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t + f(t) \right] \cdot \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t - f(t) \right] \cdot \frac{d^3}{dt^3}(f(t))}{2 \cdot \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \right]^2} - \frac{\frac{d^2}{dt^2}(f(t)) \cdot \left[(f(t))^2 \cdot \frac{d^2}{dt^2}(f(t)) + \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \right]^2 \cdot \left[\frac{d}{dt}(f(t)) \cdot t - f(t) \right] \right]}{\left[\frac{d}{dt}(f(t)) \right]^3}$$

Den anden afledede består altså af to led. Det første af leddene indeholder faktoren den tredje afledede af f , dvs. f''' . Men fortegnet for f''' kan vi intet sige om i almindelighed. Heldigvis indeholder dette led også faktoren

$$(f'(t) \cdot t + f(t))$$

som er lig med nul i ekstremumsstedet. Vi skal altså kun kigge på det andet led i ekstremumsstedet. Det er til gengæld et pænt led, idet alle faktorerne har konstant fortegn i det indre af intervallet $]0; x_0[$. En samlet vurdering af fortegnet viser faktisk, at det nødvendigvis er positivt. Selv om grafen for $B(t)$ i almindelighed har mulighed for at slingre lidt (dvs. den behøver ikke være opad hul), så er den altid opad hul i ekstremumsstedet, der derfor nødvendigvis er et minimumssted.

På dette sted i projektet kan vi så begynde at slække på kravene for f : Kan vi fx opgive kravet om at grafen for f er nedad hul? Men nu bør vi ikke røbe mere, for der er stadigvæk lidt godter tilbage i undersøgelsen. I stedet håber vi, at vi med dette eksempel har sandsynliggjort, at CAS-systemer kan medvirke til en større bredde i de projekter, små som store, som eleverne kan kaste sig over i løbet af deres gymnasietid – projekter, som måske endda kan kulminere med en tredjeårsopgave, som ikke bare er et rent 'biblioteksspeciale', hvor eleverne kan slå svarene op i diverse bøger uden selv at gå på opdagelse.