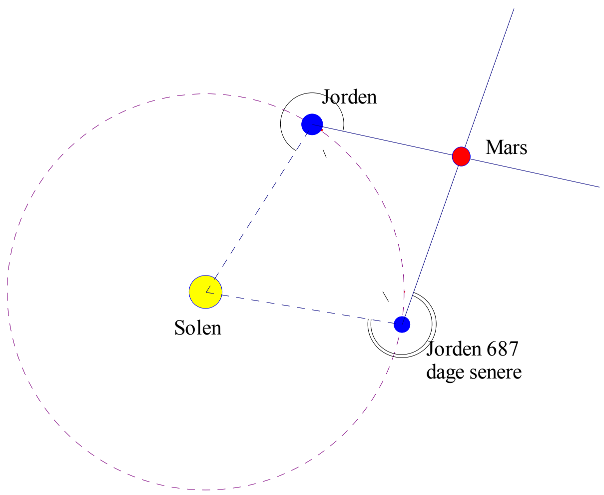
Hvordan Kepler fandt sine love

> ”Astronomerne forstod ikke at overmande denne krigsgud (Mars). Men den fortræffelige hærfører Tycho har under 20 års nattevågen udforsket al hans krigslist; og jeg omgik ved hjælp af den moderlige jords omløb selv alle hans krumninger”
>
> (Johannes Kepler, 1571-1620)

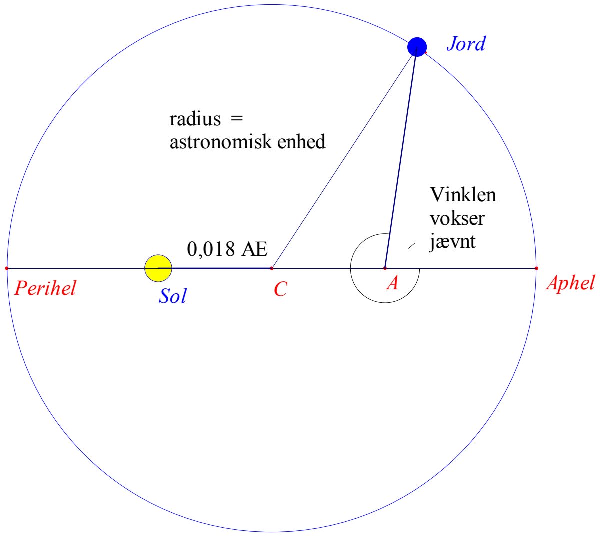
Kepler drømte om at finde planeternes sande baner. Han var klar over at det eneste sted han kunne få adgang til præcise data var hos den danske astronom Tycho Brahe (!546-1601), der havde tilbragt tyve år på øen Hven med at udføre omhyggelige målinger af stjernernes og planeternes postioner. I februar 1600 blev Kepler ansat som matematisk assistent hos Tycho Brahe og fik overdraget arbejdet med at udarbejde en beskrivelse for Mars bane, der var lige så præcis som Tycho Brahes målinger, dvs. den skulle kunne gengive Mars position med en nøjagtighed på 4 buesekunder. Kepler bekendtgjorde i sit overmod, at det ville tage ham 8 dage at løse denne opgave. Det skulle imidlertid komme til at tage ham 6 år at løse problemet med at finde en præcis beskrivelse af den sande bane for Mars.

Første trin i løsningen af opgaven er en omhyggelig beregning af udvalgte Mars postioner rundt langs banen. Udgangspunktet er omløbstiden for Mars omkring Solen, som blev fastlagt til 687 dage. Hver gang der går 687 dage er Mars altså tilbage i den samme position i forhold til Solen. Ved at slå op i Tycho Brahes tabeller med 687 dages mellemrum kunne Kepler derfor finde retningen til såvel Solen som til Mars på sådanne sammenhørende datoer. Men dermed kunne han også beregne vinklen mellem Solen og Mars på sådanne sammenhørende datoer:



Keplers bestemmelse af Marspositioner

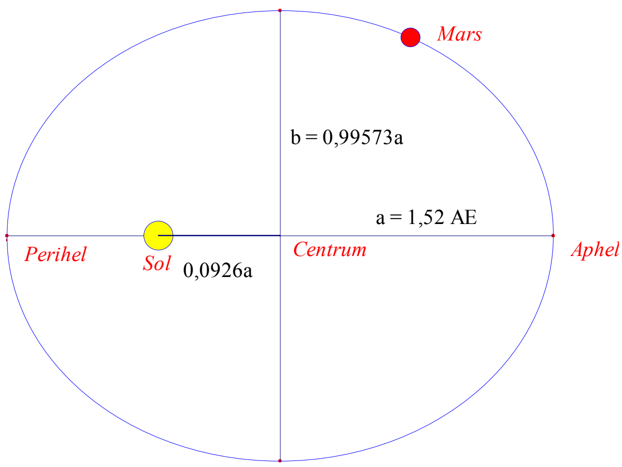
Dermed har han to uafhængige sigtelinjer til Mars set fra Jordens to positioner og kan dermed bestemme Mars position i forhold til Jordens to positioner. Forudsætningen for at kunne gennemføre en sådan beregning er derfor, at Kepler kender Jordens position i forhold til Solen de pågældende datoer (idet han nok kan slå vinklen op i Tycho Brahes tabeller, men Jordens bane er ikke cirkelformet, så han mangler at kende afstanden). Kepler tog her udgangs punkt i en simpel men velprøvet model for Jordens bane omkring Solen. I denne model er Jordens bane omkring Solen nok cirkelformet, men Solen ligger *ikke* i centrum for banen. I stedet flyttes Solen ud til et punkt som ligger 0,018 astronomiske enheder fra centrum. Forholdet mellem Solens afstand til centrum og Jordens afstand til centrum er altså 0,018. Dette kaldes Solens excentricitet e. (Den moderne værdi for excentriciteten er $e = 0{,}0167$).



Keplers model for Jordens bane

Lige modsat Solen ligger Solens antipunkt A, og det er omkring dette punkt Jorden roterer med konstant vinkelhastighed. Herved opnåede Kepler, at Jorden bevæger sig hurtigst, når den er tættest på Solen (i perihelet) og langsomst, når den er fjernest fra Solen (i aphelet). Modellen gør også rimeligt rede for forskellen i længden af de fire årstider. Selvom vi nu ved, at modellen er forkert, var den altså i så god overensstemmelse med Tycho Brahes data at den ikke forstyrrede de følgende beregninger.

På basis af denne model for Jordens bane – som altså tillod Kepler at finde Jordens position i forhold til Solen på et vilkårligt tidspunkt – bestemte Kepler nu en lang række positioner for Mars rundt langs banen. Med disse positioner som udgangspunkt blev det klart, at Mars *ikke* følger en cirkelbane, men nok en oval bane med to symmetriakser og et centrum:



Keplers ovalbane for Mars

Forholdet mellem lilleaksen b og storeaksen a kunne Kepler bestemme til

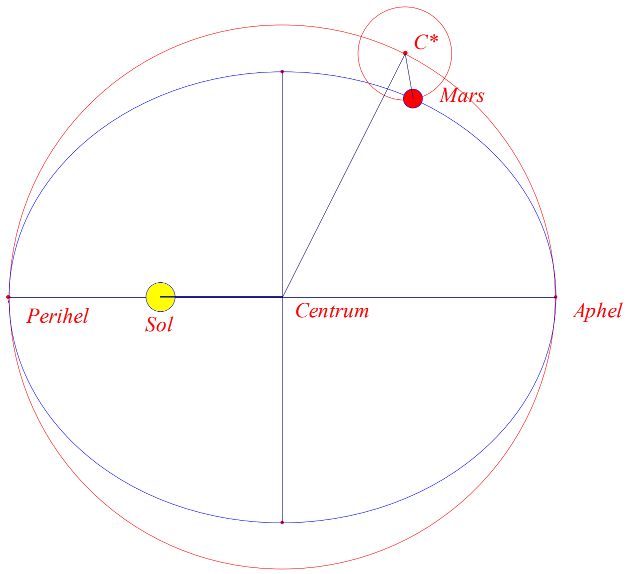
$$\frac{b}{a} = 0{,}99573$$

Ydermere stod det klart fra begyndelsen at Solen ikke lå i centrum for den ovale bane, men forskudt langs storeaksen med en *excentricitet* givet ved e = 0,0926, dvs. forholdet mellem Solens afstand til centrum og den halve storeakse a er netop givet ved dette tal:

$$e = \frac{SC}{a} = 0.0926$$

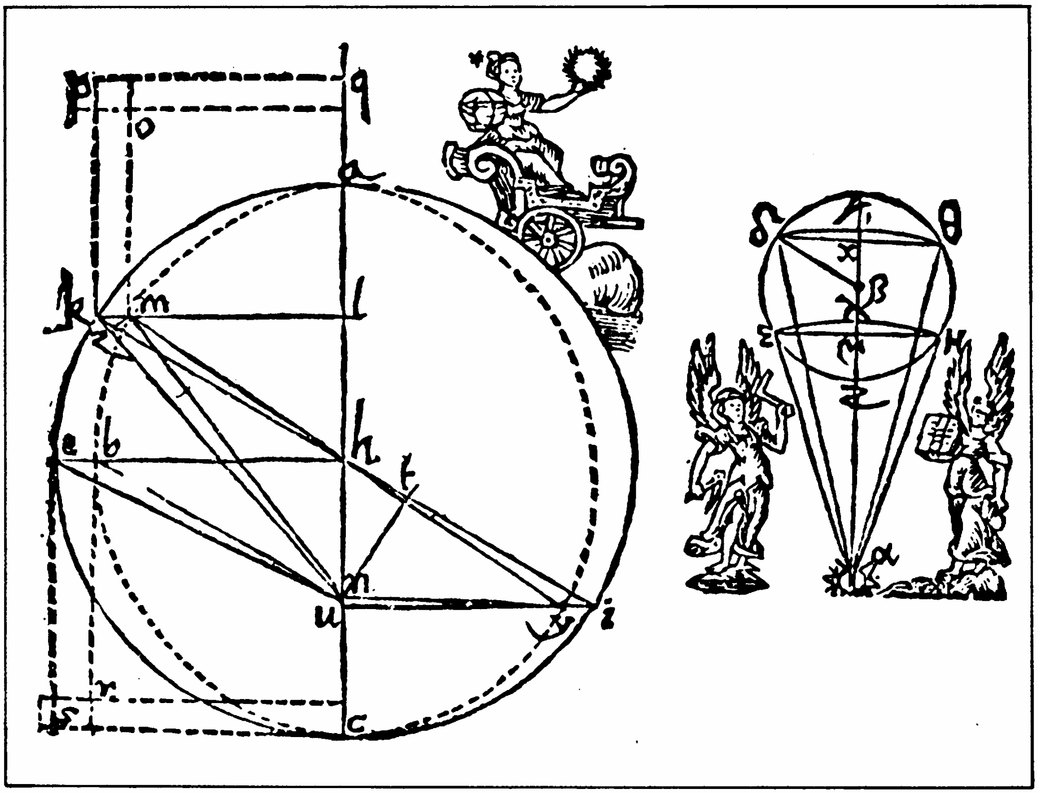
(Den moderne værdi er givet ved 0,0934).

I begyndelsen prøvede Kepler nu sig frem med forskellige former for banebeskrivelser baseret på ideen om epicykler, dvs. han lod et fiktivt centrum C_* bevæger sig rundt på ovalens omskrevne cirkel og lod så Mars bevæge sig rundt på en eller flere cirkler med centrum i C_*.



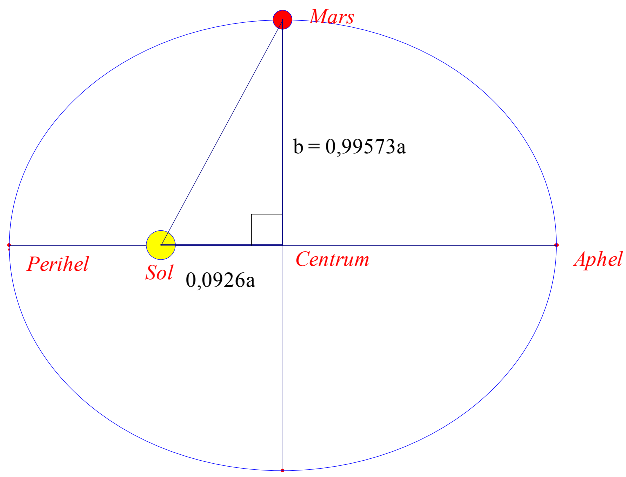
Keplers epicykelmodel for Marsbanen

Keplers første lov: Den første ligning



Keplers originaltegning af modellen for Marsbanen

Efter fire års forgæves beregninger måtte han imidlertid indse, at han ikke kunne komme videre med epicyklerne. Af kringlede omveje gjorde han nu i stedet en bemærkelsesværdig iagttagelse i sin jagt på at forstå ovalens form.

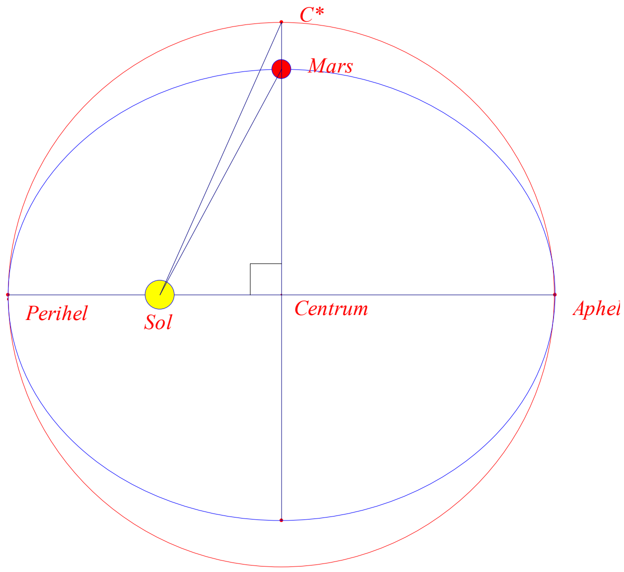


Keplers første bemærkelsesværdige iagttagelse

Ved at beregne afstanden fra Solen til Mars på det tidspunkt, hvor Mars krydser lilleaksen opdagede han at afstanden fra Solen til Mars var endog meget tæt på den halve storeakse:

$$SM = \sqrt{(0{,}0926a)^2 + (0{,}99573a)^2} = 1{,}00003a \approx a$$

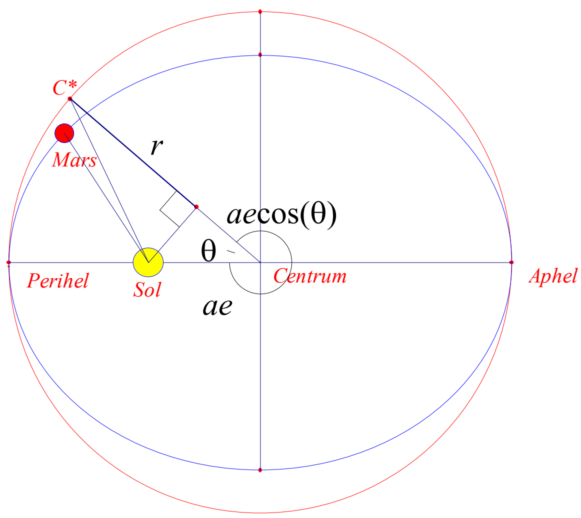
Men det er en meget vigtig ledetråd, for blandt alle ovalerne er *ellipsen* karakteriseret ved at afstanden fra brændpunktet til lilleaksens toppunkt netop er den halve storeakse. Det kunne derfor pege på at baneformen i virkeligheden var *elliptisk med Solen i det ene brændpunkt*. Kepler overbeviste nu sig selv om, at ellipsebanen var den søgte kandidat til Marsbanen ved endnu et inspireret gæt: Kepler antog, at det fiktive center C_* netop ville passere lilleaksen samtidigt med Mars:



Keplers anden bemærkelsesværdige iagttagelse

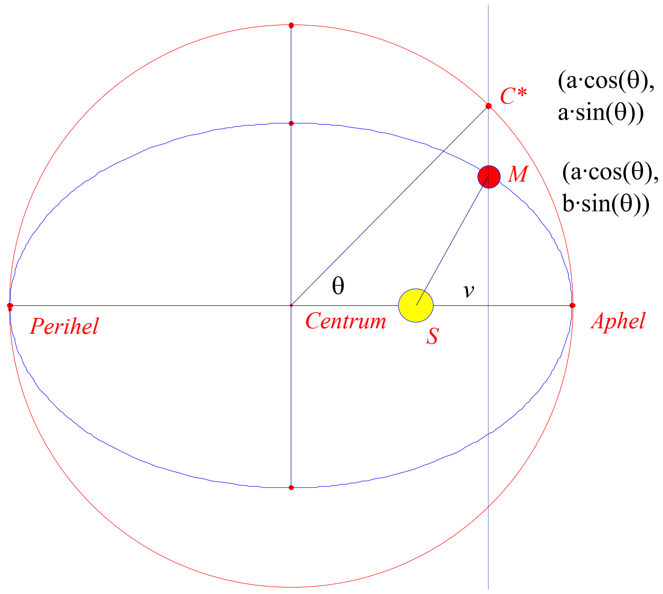
Men så er projektionen af *forbindelsesstykket mellem Solen og det fiktive center*, dvs. SC_* på *radius for det fiktive center*, dvs. CC_* netop lig med den halve storeakse a, dvs. det samme som *afstanden fra Solen til Mars*. Kepler fik nu det lykkelige indfald at gætte på, at dette ville være tilfældet overalt langs Mars bane!

Projektionen af forbindelsesstykket fra Solen til det fiktive center C_* er netop lig med afstanden fra Solen til Mars. Kaldes retningsvinklen for den fiktive radius for θ (*Keplervinklen*) ser vi derfor, at *afstanden* fra Solen til Mars er givet ved den simple ligning



$$r = a - ae\cos(\theta) \quad (\textit{Keplers første ligning})$$

Spørgsmålet er så blot hvad der fastlægger retningen fra Solen til Mars. Efter kringlede og endnu flere fejlslagne forsøg gættede Kepler til sidst på, at Mars netop lå på den linje fra det fiktive center C_*, der står vinkelret på storeaksen:



Keplers model for det fiktive center C_*

Til sin store glæde opdagede han nemlig, at dette passede perfekt med at banen var en ellipse med Solen i det ene brændpunkt. I så fald er afstanden fra Solen til Mars nemlig lig med længden af den tilhørende brændstråle. Men der kender vi jo en simpel formel:

$$r = a - ex = a - ea\cos(\theta)$$

i perfekt overensstemmelse med Keplers første ligning. Vi har her udnyttet, at ellipsen er en fladtrykt cirkel, hvorfor det fiktive center har koordinaterne

$$C_* = (a\cos(\theta), a\sin(\theta))$$

Mars får så koordinaterne

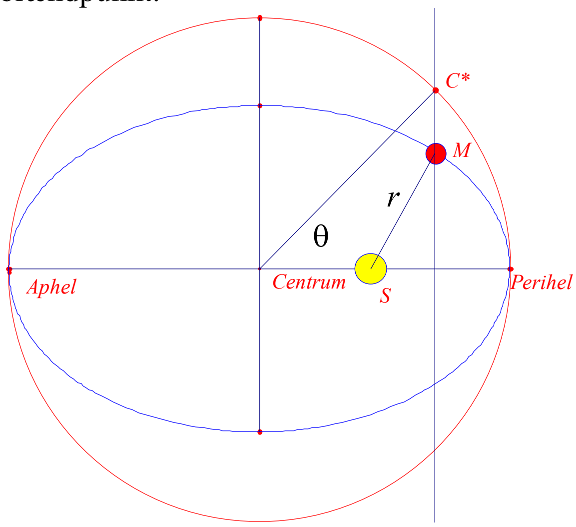
$$M = (a\cos(\theta), b\sin(\theta))$$

dvs. vi har netop

$$x = a\cos(\theta)$$

Kepler checkede nu sin ellipsemodel mod Tycho Brahes Marsdata og opdagede at de endelig passede. Overbevist om sin teoris storslåethed overførte han derefter stort set uden videre undersøgelser sin model til alle de øvrige planetbaner, inklusive Jordens bane! Dermed var han nået frem til den første af sine berømte planetlove:

Keplers første lov: Planeterne bevæger sig i ellipseformede baner omkring Solen med Solen i det ene brændpunkt.



Afstanden fra Solen til planeten er givet ved Keplers første ligning

$$r = a - ae\cos(\theta)$$

hvor θ er Keplervinklen, dvs. retningsvinklen for den fiktive radius.

Bemærkning: I vore dage ville man nok ikke hæfte sig så meget ved den fiktive radius og den tilhørende retningsvinkel θ. I stedet ville man udtrykke afstanden fra Solen til planeten direkte ved planetens egen retningsvinkel v i forhold til storeaksen. Hertil lægger vi mærke til, at vi har to formler for x-koordinaten til planeten. Dels kan den udtrykkes direkte ved retningsvinklen:

$$x = ae + r\cos(v)$$

Dels kan den som før udtrykkes ved hjælp af Keplervinklen θ, dvs. der gælder også:

$$x = a\cos(\theta)$$

Der gælder derfor sammenhængen:

$$ae + r\cos(v) = a\cos(\theta) \Leftrightarrow r\cos(v) = a\cos(\theta) - ae \Leftrightarrow er\cos(v) = ae\cos(v) - ae^2$$

Sammenligner vi det med Keplers første lov:

$$r = a - ae\cos(\theta)$$

ser vi, at de minder meget om hinanden, idet leddet $ae\cos(\theta)$ optræder i dem begge, men med modsat fortegn. Vi kan derfor nemt eliminere dette led:

$$er\cos(v) + r = ae\cos(\theta) - ae^2 + a - ae\cos(\theta) = a(1 - e^2)$$

Men så er det jo trivielt at isolere r:

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v)}$$

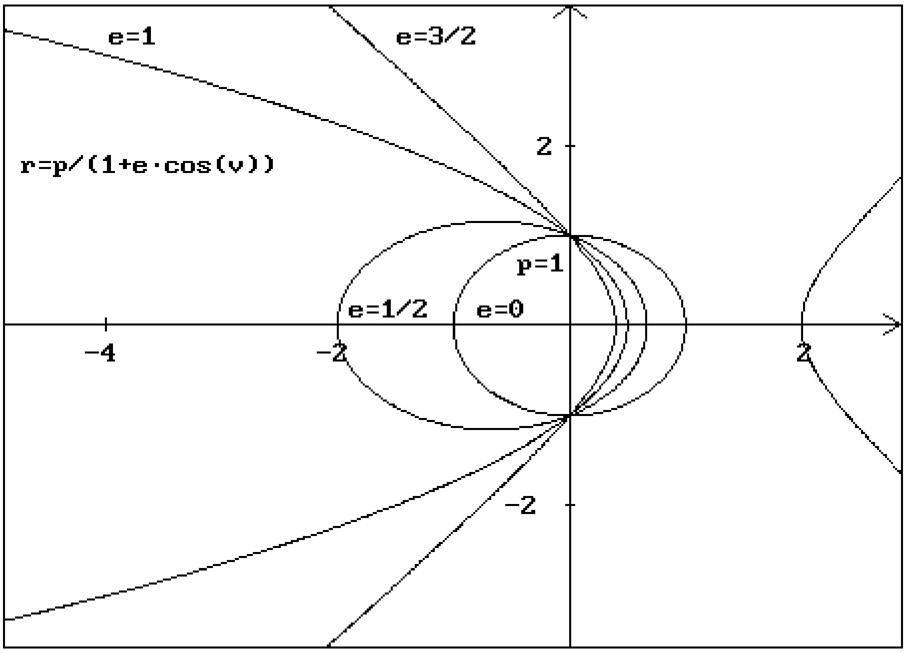
Denne formel har ydermere den fordel at den også gælder for hyperbelbaner og passende omskrevet endda også for parabelbaner. Hertil bemærker vi, at når v = 90°, så er der netop tale om den halve bredde, dvs. p. Samtidigt er cos(v) = 0, hvorfor vi slutter at der må gælde

$$p = a(1-e^2)$$

Dermed kan formlen for ellipsen også skrives på formen

$$r = \frac{p}{1+e\cos(v)}$$

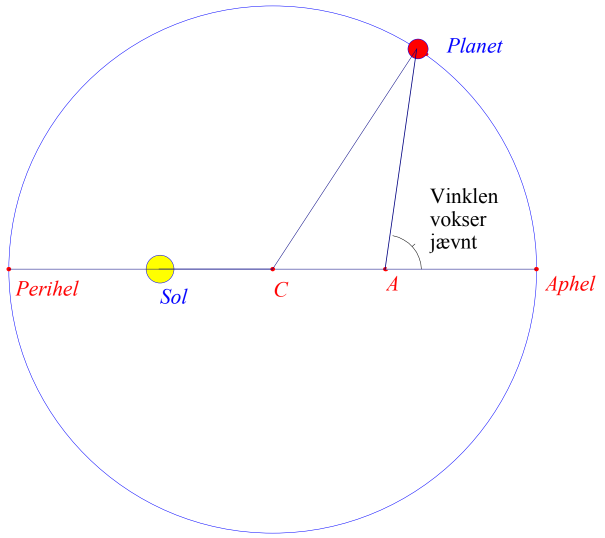
og det er på denne form, den kan anvendes på *alle* keglesnit!



Men som vi skal se er den ikke til nogen hjælp, når vi kommer til Keplers anden lov!

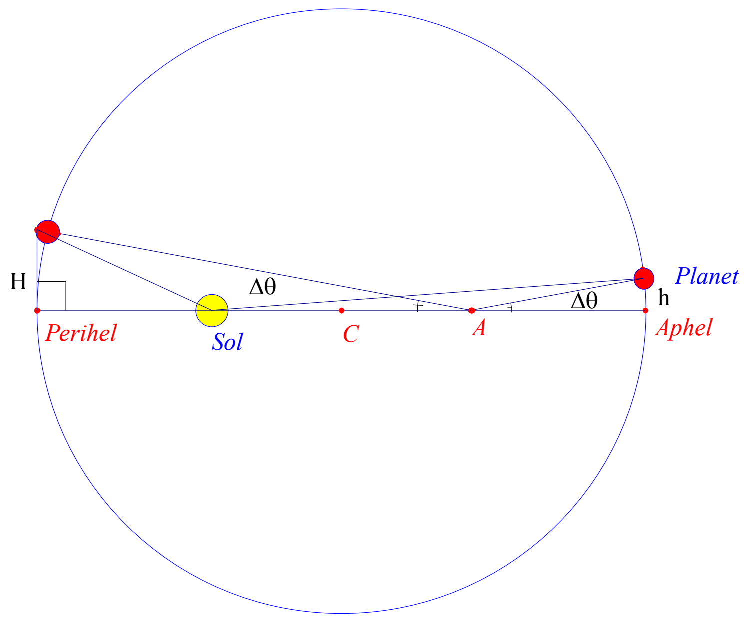
Keplers anden lov: Den anden ligning

Det lykkedes også for Kepler gennem kringlede omveje at fastlægge dynamikken for banebevægelsen. Udgangspunktet var hans primitive cirkelmodel for Jordens bevægelse, der i første omgang også blev brugt på planeterne:



En simpel model for planetdynamik

Udgangspunktet var en excentrisk sol med et modsat 'antipunkt' *A*, hvor *vinklen til planeten med udgangspunkt i antipunktet* A *vokser jævnt*. Det fører til, at planeten bevæger sig langsomst i det fjerneste punkt fra Solen, dvs. aphelet, og tilsvarende hurtigst i det nærmeste punkt, dvs. perihelet. Det passede fint med en generel observation om planethastighederne, ifølge hvilken de synes at bevæge sig langsommere, jo længere væk de var fra Solen. Kepler kiggede nu nærmere planetens bevægelse lige i nærheden af aphelet og tilsvarende lige i nærheden af perihelet. I stedet for at kigge på vinklen fra antipunktet *A*, betragtede han nu forbindelseslinjen fra planeten til Solen:



Kepler opdager arealloven

Kepler vidste nu, at planeten i det samme lille tidsrum Δt ville overstryge den samme lille vinkel $\Delta\theta$ set fra antipunktet A. Men så vil de to små retvinklede trekanter (med fælles toppunkt i A) være ligedannede, dvs. højderne h og H vil forholde sig som afstandene til antipunktet:

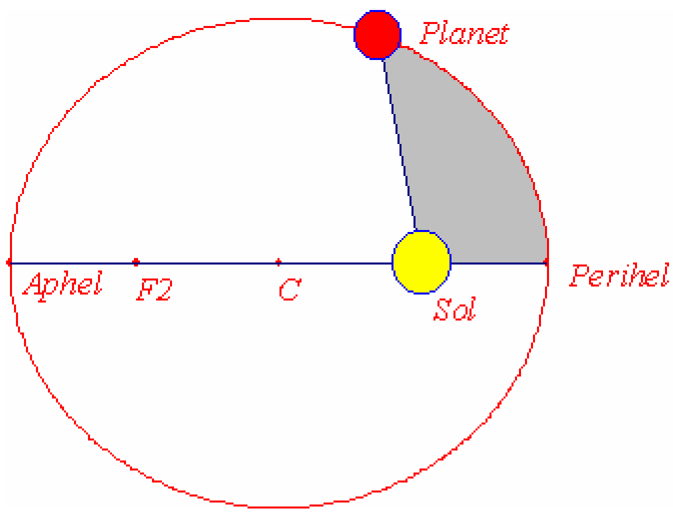
$$\frac{h}{H} = \frac{R - \mathrm{Re}}{R + \mathrm{Re}} = \frac{R(1-e)}{R(1+e)} = \frac{1-e}{1+e}$$

Ser vi i stedet på forbindelseslinjen til Solen, ser vi derfor at de tilsvarende retvinklede trekanter (med fælles toppunkt i Solens centrum), har samme areal:

$$\Delta_1 = ½h \cdot G = ½h \cdot R \cdot (1+e) = ½H \cdot \frac{1-e}{1+e} \cdot R \cdot (1+e) = ½H \cdot R \cdot (1-e) = ½H \cdot g = \Delta_2$$

De arealer, der overstryges af forbindelseslinjen til Solen er derfor *lige store*. Selv om Kepler kun havde argumenteret for reglen i forbindelse med meget små tidsrum lige omkring aphelet og perihelet udvidede han den til vilkårlige tidsrum overalt langs banen. I stedet for vinklen set fra antipunktet A er det altså *arealet set fra Solen, der vokser jævnt*. Og selv om cirkelbanen i virkeligheden er er forkert og må erstattes med en ellipsebane, flyttede han blot beskrivelsen med sig over til ellipsen (hvor antipunktets rolle overtages af det andet brændpunkt), og nåede på den måde til sidst frem til den berømte anden lov.

Keplers anden lov:
Hvis Solen, der befinder sig i det ene brændpunkt, forbindes med planeten, så vil det overstrøgne areal vokse jævnt med tiden.

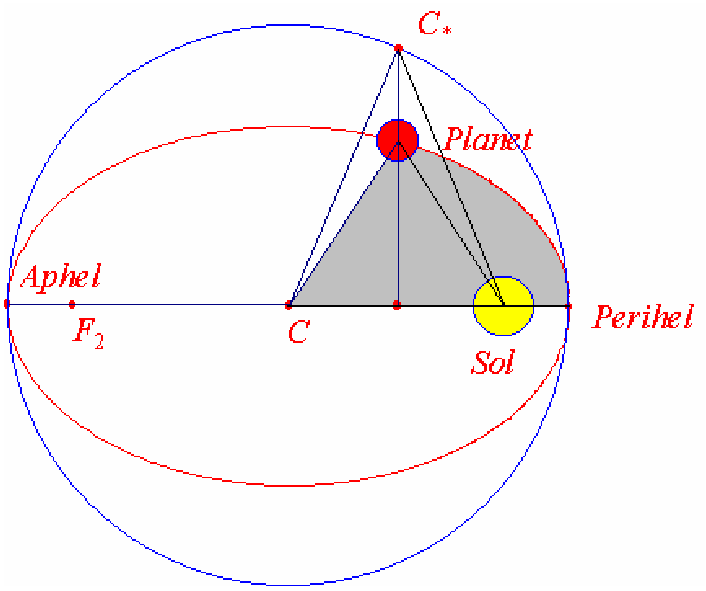


Da hele ellipsens areal er πab, vil det overstrøgne areal derfor være givet ved formlen

$$A_{overstrøget} = \frac{\pi ab}{T} \cdot t$$

hvor T er omløbstiden og t er den tid, der er gået siden planeten startede i perihelet (svarende til retningsvinklen $v = 0°$).

Kepler fandt nu en formel for det overstrøgne areal.



Keplers arealberegning

Først udvides det overstrøgne areal til en hel *centralsektor* med toppunkt i ellipsens centrum. Det sker ved at tilføje den viste trekant. Dernæst udnyttes det, at ellipsen er en fladtrykt cirkel med fladtrykningsfaktoren $\frac{b}{a}$, hvorfor der må gælde

$$A_{ellipsesektor} = \frac{b}{a} \cdot A_{cirkelsektor} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi a^2 = \frac{1}{2} \cdot \theta ab$$

Det samme gælder for trekanterne:

$$A_{ellipsetrekant} = \frac{b}{a} \cdot A_{cirkeltrekant} = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot ae \cdot \sin(\theta) = \frac{1}{2} \cdot abe \cdot \sin(\theta)$$

Alt i alt finder vi derfor det følgende udtryk for det overstrøgne areal:

$$A_{overstrøget} = A_{ellipse} - A_{trekant} = \frac{1}{2} \cdot \theta ab - \frac{1}{2} \cdot abe \cdot \sin(\theta)$$

Kombinerer vi de to fundne udtryk for det overstrøgne areal finder vi hermed *Keplers anden ligning*:

$$\frac{\pi ab}{T} \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \theta ab - \frac{1}{2} \cdot abe \cdot (\theta) \Rightarrow \frac{2\pi}{T} \cdot t = \theta - e\sin(\theta)$$

Læg mærke til at den giver *tiden t* (fra perihelpassagen) som funktion af Keplervinklen θ. Det ville selvfølgelig være endnu bedre, om vi kunne have fundet Keplervinklen θ som funktion af tiden *t*. Men det lader sig desværre ikke gøre, da ligningen *ikke* kan løses eksplicit med hensyn til θ.

Som det ses af ligningen bevæger det fiktive center C_* sig *ikke* jævnt rundt på cirklen, idet der er en lille korrektion $e \cdot \sin(\theta)$, der skal trækkes fra. Men forskellen er så lille, fordi excentriciteten e er så lille, at vi kan løse ligningen iterativt:

$$\theta = \frac{2\pi}{T} \cdot t + e \cdot \sin(\theta)$$

Hvis vi for eksempel vil finde Keplervinklen hørende til en kvart periode, fås derfor i første omgang:

$$\theta \approx \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}$$

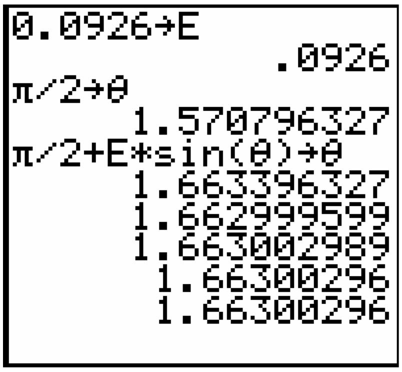
Indsættes det nu i den itereative formel fås i første omgang:

$$\theta \approx \frac{\pi}{2} + e \cdot \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} + e$$

I næste omgang fås så:

$$\theta \approx \frac{\pi}{2} + e \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + e) = \frac{\pi}{2} + e \cdot \cos(e)$$

osv. I løbet af gangske få iterationer vil værdien nu stabilisere sig på et bestemt decimaltal. Med $e = 0{,}0926$ fås således:



Altså er Keplervinklen givet ved $\theta = 1.66300296$ (målt i radianer!). Det fiktive center C_* befinder sig nu i punktet ($a \cdot \cos(\theta)$, $a \cdot \sin(\theta)$), mens planeten befinder sig i punktet ($a \cdot \cos(\theta)$, $b \cdot \sin(\theta)$), og vi er derfor nu i stand til at regne sig frem i hvilken retning set fra Jorden vi skal kigge for at få øje på planeten en kvart periode efter at den har passeret perihelet. Dermed var Kepler nået frem til kronen på sit værk: Han kunne nu opstille planettabeller over Solens, månens og planeternes fremtidige positioner med hidtil uset nøjagtighed.

Det er yderst bemærkelsesværdigt, at Kepler nåede frem til både at finde en korrekt beskrivelse af baneformen, og af dynamikken for planetens bevægelse rundt i ellipsebanen, på et tidspunkt, hvor den moderne differentialregning ikke var opfundet. Det blev Newton, der senere hen skulle såvel opfinde differentialregningen, som bruge den i forbindelse med sin berømte gravitationslov til at udlede Keplers love på et fysisk grundlag. Men det er en anden historie.