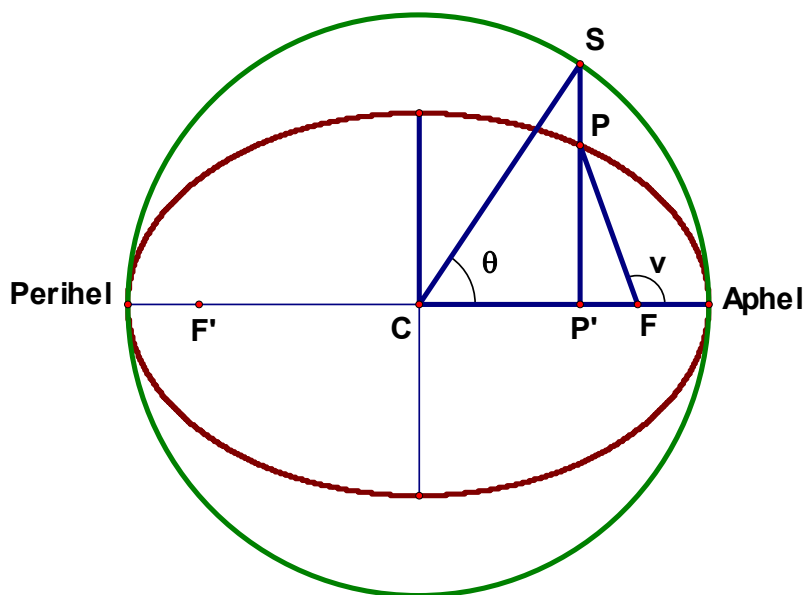


## Keplers ellipse

Keplers udgangspunkt er ellipsen opfattet som en fladtrykt cirkel. Han har selvfølgelig stadigvæk brug for brændpunkter mm. Konstruktionen af disse er simpel ud fra ellipsens omskrevne rektangel. Detaljerne i en sådan konstruktion er der gjort rede for i bogen **De centrale keglesnit**.

Ifølge Keplers første lov bevæger planeterne sig i ellipser med Solen i det ene brændpunkt. Til enhver sådan planet **P** knytter Kepler nu en 'skyggeplanet' **S**, der bevæger sig på den omskrevne cirkel på en sådan måde at forbindelseslinjen mellem skyggeplaneten og selve planeten hele tiden står vinkelret på storaksen.



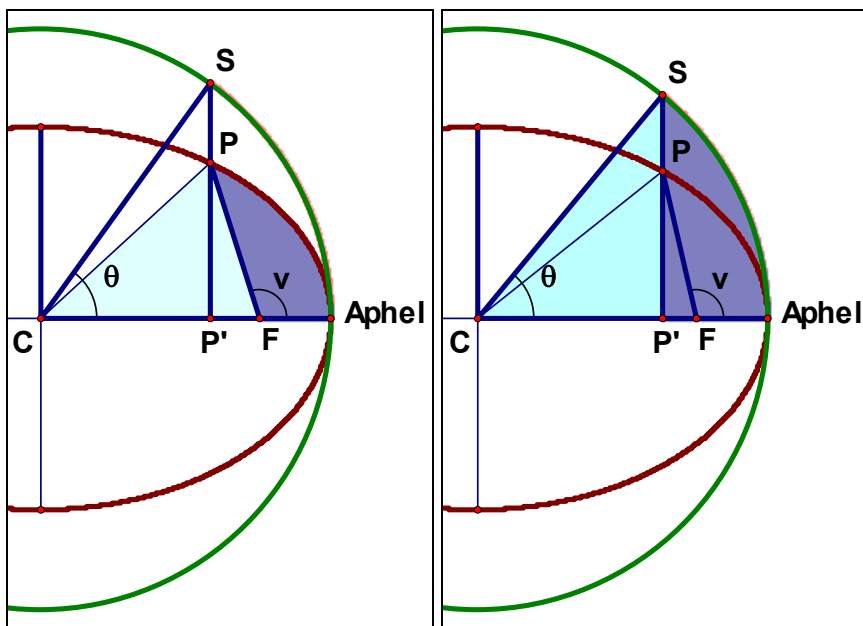
Det giver nu anledning til to vinkler. Den faktiske planetvinkel  $\nu$  og Keplers skyggevinkel  $\theta$ . Læg mærke til, at planetens vinkel  $\nu$  måles ud fra ellipsens brændpunkt **F**, mens skyggevinklen  $\theta$  måles ud fra ellipsens centrum **C**.

Man kan tænke på skyggeplaneten, som en fiktiv position, der styrer planetens position i overensstemmelse med den geometriske konstruktion, hvor det jo netop er **S**, der er uafhængig og **P** der er afhængig. Hvis man animerer **S** får man en første tilnærmelse til planetens bevægelse rundt om Solen. Men Kepler vidst godt at det netop kun var en tilnærmelse.

Kepler bemærkede nu, at der er en simpel forbindelse mellem skyggevinklen  $\theta$  og planetvinklen  $v$ . Denne forbindelse kommer fra Keplers anden lov, **arealloven**. Ifølge Keplers anden lov overstryger planeten et areal  $A_{\text{planet}}$ , der vokser jævnt med tiden. Man kan få det overstrøgne areal at se ved at spore forbindelseslinjen  $FP$ . Hvis omløbstiden er  $T$ , og  $t$  tilsvarende er tiden siden planeten sidst var i Aphelet, har planeten derfor overstrøget et areal  $A_{\text{planet}}$ , som netop er brøkdelen  $t/T$  af hele ellipsens areal ( $\pi \cdot a \cdot b$ ), dvs.

$$A_{\text{planet}} = \pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T}$$

Men dette areal kan vi nu knytte til det areal, som skyggeplanet overstryger, ved en simpel overvejelse:



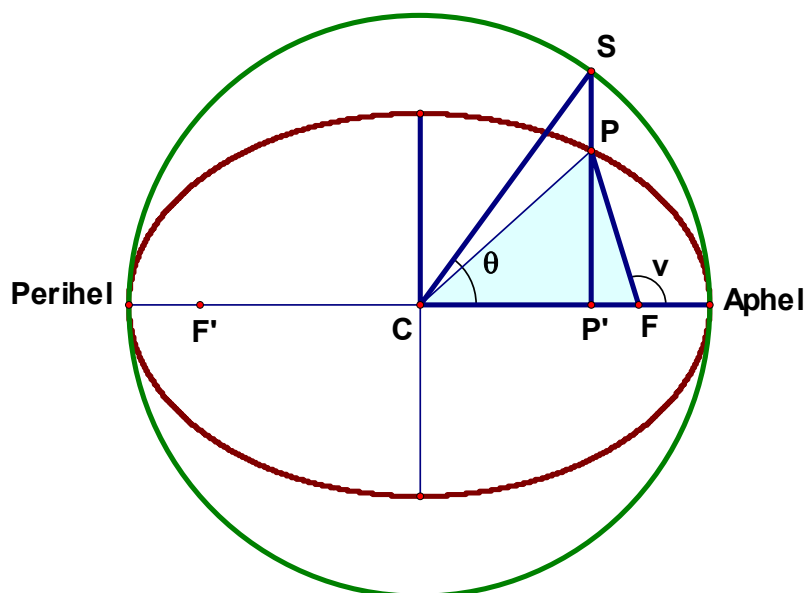
Hvis vi lægger trekantarealet  $CFP$  til det overstrøgne areal fås nemlig en *fladtrykt cirkeludsnit*. Men det må da have et areal, som netop er fladtrykningsfaktoren  $b/a$  af cirkeludsnittet  $CA_{\text{Aphel}}S$ :

$$(*) \quad A_{\text{planet}} + \Delta CFP = \frac{b}{a} \cdot A_{\text{cirkeludsnit}}(CA_{\text{Aphel}}S)$$

Men cirkeludsnittet kan på den anden side findes ved formlen:  
 $\frac{1}{2} \cdot \text{radius} \cdot \text{buelængde}$ , dvs.:

$$A_{\text{cirkeludsnit}} = \frac{1}{2} \cdot \theta \cdot a^2$$

Her har vi målt keplervinklen i radianer, idet buelængden **b** da netop er givet som produktet af radius **a** og centervinklen  $\theta$ , dvs.  $b = a \cdot \theta$ .



Tilbage står så blot at finde arealet af den involverede trekant  $\Delta CFP$ . Det følger af elementær trigonometri, idet koordinaterne til nøglepunkterne er givet ved:

$$S(a \cdot \cos(\theta), a \cdot \sin(\theta)), \quad P(a \cdot \cos(\theta), b \cdot \sin(\theta)), \quad F(a \cdot e, 0)$$

Grundlinjen i trekanten **CFP**, dvs. stykket **CF** er givet ved  $a \cdot e$ . Højden i trekanten **CFP**, dvs. stykket **P'P** er tilsvarende givet ved  $b \cdot \sin(\theta)$ . Altså er det søgte areal givet ved

$$\Delta CFP = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot e \cdot \sin(\theta)$$

Indsættes det i formlen (\*) fås dermed endelig **Keplers ligning**:

$$\pi \cdot a \cdot b \cdot \frac{t}{T} + \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot e \cdot \sin(\theta) = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \theta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \theta \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi \cdot t}{T} = \theta - e \cdot \sin(\theta)$$

Den fastlægger Keplervinklen  $\theta$  som funktion af tiden siden sidste Aphelpassage og dermed også planetens position til et vilkårligt tidspunkt: Dels afstanden  $r$  til Solen, dels Planetvinklen  $v$ , dvs. vinklen i forhold til Apelet.

Det er en transcendent ligning, som **ikke** kan løses symbolsk, men den kan løses ved iteration, idet den omskrives på formen:

$$\theta = \frac{2\pi \cdot t}{T} + e \cdot \sin(\theta)$$

Ved indsætte startvinklen  $\frac{2\pi \cdot t}{T}$  på  $\theta$ 's plads på højresiden fås et forbedret bud på værdien af  $\theta$ , der derefter indsættes som det nye bud osv. I praksis kan man nøjes med 5-10 iterationer for moderate værdier af excentriciteten  $e$ .

Men **Geometer** kan også håndtere iterationer, så vi kan nu konstruere planetbevægelsen dynamisk i fuld overensstemmelse med Keplers anden lov! Vi må da først indføre de grundlæggende parametre:

Excentriciteten  $e$ : Den beregnes som forholdet mellem brændpunktsafstanden  $CF$  og den halve storakse  $CA_{\text{aphel}}$ .

Tiden  $t$ : Den indføres som en parameter og gives startværdien 0. Hvis vi som tidsenhed vælger omløbstiden  $T$ , sættes denne til 1 og kan altså ignoreres i det følgende.

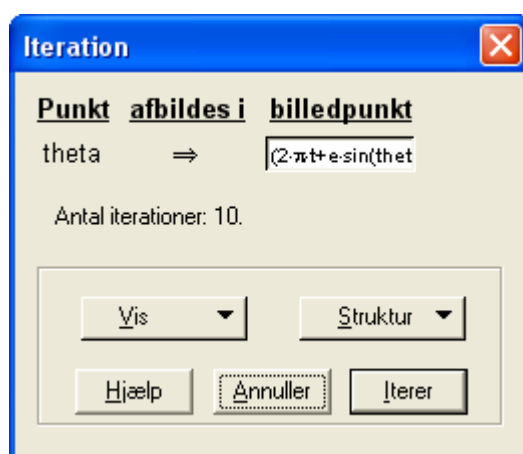
Keplervinklen  $\theta$ : Den sættes til 0 radianer som startværdi, mens dens slutværdi nu skal findes ved hjælp af iteration.

Vi skal altså gennemføre det første trin i iterationen: Vi udregner derfor

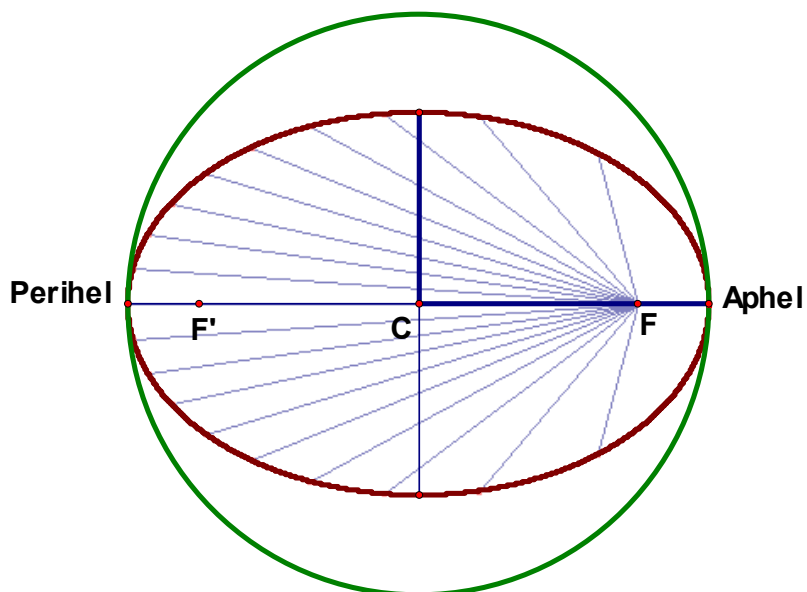
$$(2\pi \cdot t + e \cdot \sin(\theta)) \cdot 1 \text{ radian}$$

Denne vinkel udpeges og vi vælger **Marker vinkel** i **Transformer**-menuen. Vi kan så dreje Apelet om centrum med denne vinkel. Det giver det første bud på skyggens placering.

Planetens placering findes så fx ud fra den indskrevne og omskrevne cirkel på sædvanlig vis. Men stadigvæk er det kun et første bud. Vi udpeger nu startværdien for  $\theta$  (dvs. de 0 radianer!) og vælger menupunktet **I**terer på **T**ransformer-menuen. Vi afbilder den på værdien af den første iteration:



Vi kan så skjule den første iteration og nøjes med at fremhæve den sidste, dvs. vælge menupunktet **V**is kun den sidste iteration i den ovenstående **V**is-menu fra Iterations-dialogboksen.



Dermed kan vi frembringe et billede af planetens sande position til tiden  $t$ : Ved at spore forbindelseslinjen til brændpunktet kan vi nu fx frembringe figurer som den foregående, hvor vi har ladet tiden vokse i skridt af 0.05, dvs. vi får netop frembragt 20 positioner rundt langs ellipsen. Hvis vi animerer tiden ses planetbevægelsen også tydeligt, hvor planeten speeder op når den passerer Apelet og sænker farten tilsvarende når den passerer Perihelet. Det er altså lykkedes os at frembringe en fuldt realistisk simulation af en planetbevægelse. Herunder ses strukturen af iterationen med den medfølgende tabel (der kan skjules, hvis det ønskes).

**$e = 0.75224$**   
 **$t = 1.00000$**   
 **$\theta = 0.00000\pi$  radianer**  
 **$(2 \cdot \pi \cdot t + e \cdot \sin(\theta)) \cdot 1$  radianer =  $2.00000\pi$  radianer**

n	$(2 \cdot \pi \cdot t + e \cdot \sin(\theta)) \cdot 1$ radianer
0	6.28319 radianer
1	6.28319 radianer
2	6.28319 radianer
3	6.28319 radianer
4	6.28319 radianer
5	6.28319 radianer
6	6.28319 radianer
7	6.28319 radianer
8	6.28319 radianer
9	6.28319 radianer
10	6.28319 radianer