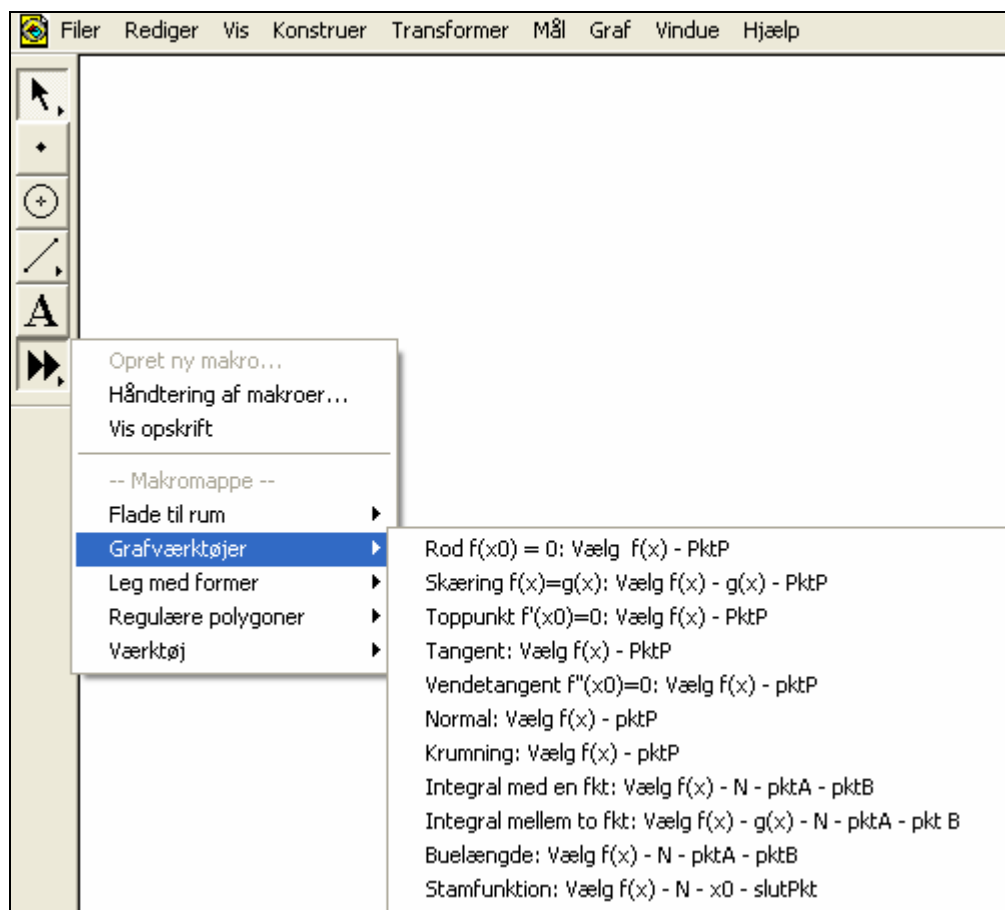


# Grafværktøjer til GeoMeter

Bjørn Felsager, Haslev Gymnasium & HF, 2003

Når man installerer GeoMeter på sin maskine følger der en lang række specialværktøjer med. Men det er også muligt at skræddersy sine egne pakker med specialværktøjer. Nu hvor GeoMeter kommer med en fuldt udstyret grafregner til at håndtere funktionsgrafer og endda inkluderer en primitiv symbolsk differentiation er det nærliggende at tilføje en standardpakke med grafværktøjer til at løse de mest almindeligt forekommende opgaver med grafer, såsom at finde toppunkter for grafer eller at beregne skæringspunkter med grafer. Det er en sådan standardpakke, der beskrives i det følgende. Den kommer som en ganske almindelig GeoMeter-fil med navnet **Grafværktøjer**, og den kan fx downloades fra GeoMeters danske hjemmeside (som du får automatisk adgang til via **Hjælp**-menuen).

Hvis man kopierer filen '**Grafværktøjer.gsp**' over i makromappen for GeoMeter vil standardværktøjerne automatisk blive indlæst som vist på figuren nedenunder. Ellers må man åbne filen **Grafværktøjer** og have den liggende i baggrunden, når man ønsker at bruge disse værktøjer:



Som det ses rummer pakken 11 standardværktøjer, der naturligt falder i to grupper: De første 7 værktøjer handler om anvendelse af differentialregning (fx via Newtons metode) og de sidste 4 værktøjer handler om integralregning. Da GeoMeter håndterer differentialregning symbolsk er det trivielt at implementere de første 7 værktøjer. Derimod er der ikke på forhånd indbygget nogen symbolske rutiner til at håndtere integraler. Her må man altså selv implementere en approksimerende sum, hvilket viser sig ikke at være helt trivielt.

## Første del: Grafværktøjer, der bygger på differentialregning

### 1. Rod: Rod $f(x_0) = 0$ : Vælg $f(x)$ - PktP

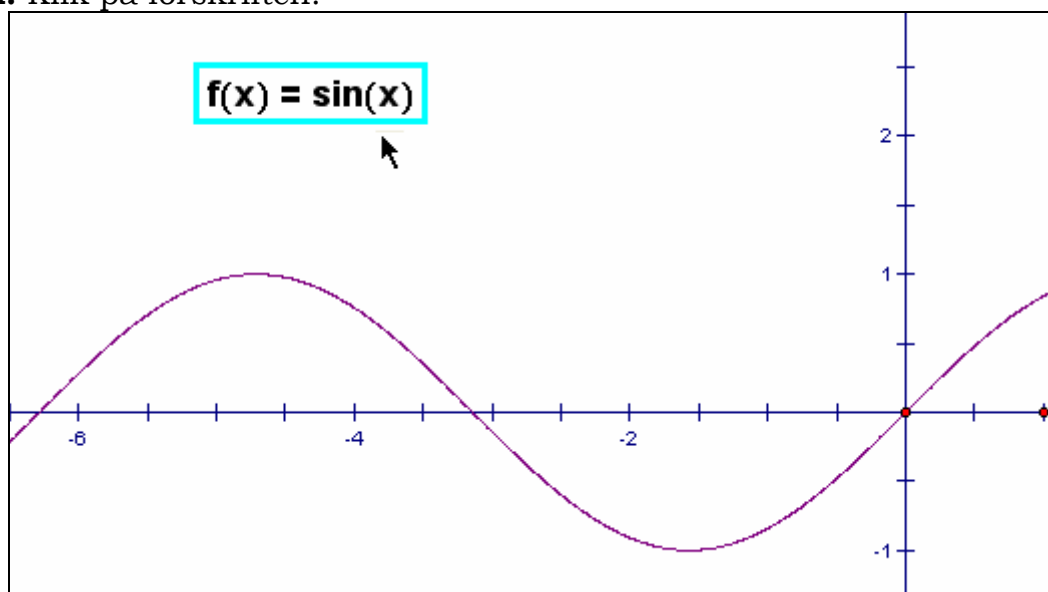
For at finde rødder benyttes Newtons metode med 10 iterationer, dvs. standarditerationen

$$x \rightarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

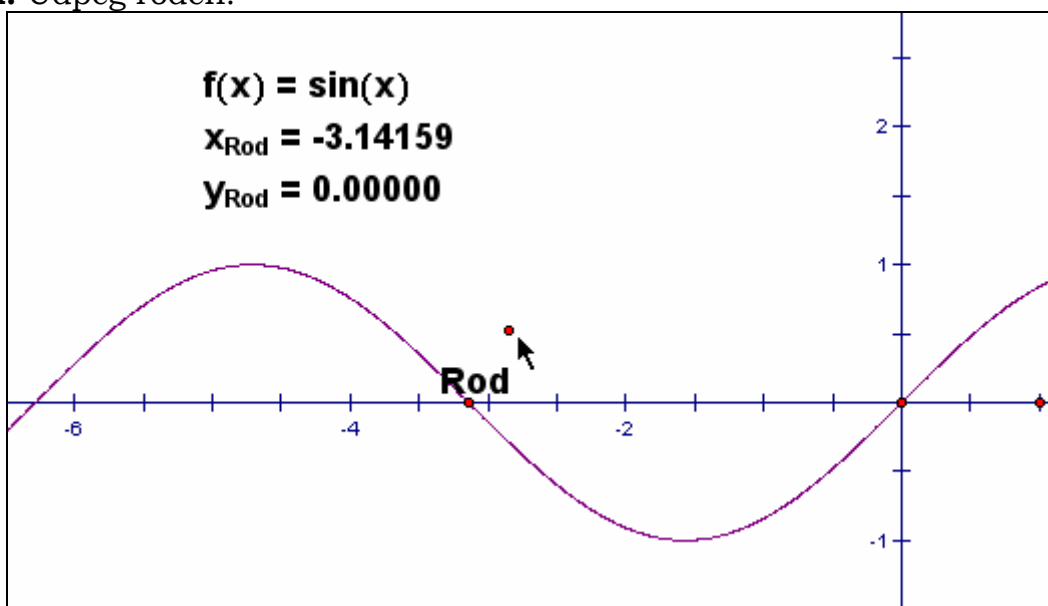
Den kræver, at man vælger en startværdi tæt ved den søgte rod.

Når man vælger **Rod**-værktøjet skal man derfor først udpege forskriften for graf funktionen  $f(x)$  og dernæst et søgepunkt  $P$  tæt på roden. Roden dukker da op på skærmen sammen med  $x$ - og  $y$ -koordinaten.

**1 trin:** Klik på forskriften:



**2 trin:** Udpeg roden:



*Bemærkning:*  $y$ -koordinaten er medtaget som en numerisk kontrol.

**2. Skæring:** Skæring  $f(x)=g(x)$ : Vælg  $f(x) - g(x)$  - PktP

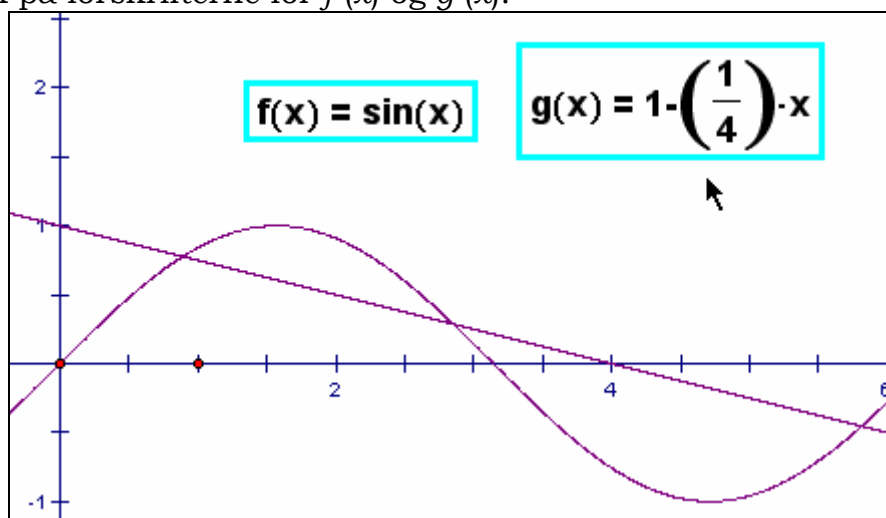
For at finde skæringspunkter mellem to grafer benyttes Newtons metode med 10 iterationer til at løse ligningen  $f(x) = g(x)$ , dvs. standarditerationen

$$x \rightarrow x - \frac{f(x) - g(x)}{f'(x) - g'(x)}$$

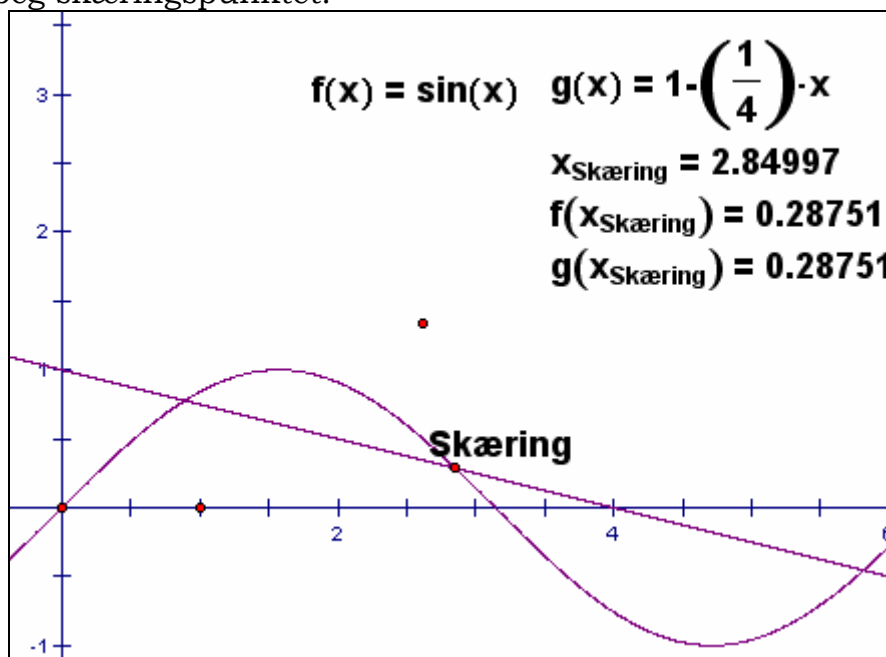
Den kræver, at man vælger en startværdi tæt ved det søgte skæringspunkt.

Når man vælger **Skærings**-værktøjet skal man derfor først udpege forskriften for de to graffunktioner  $f(x)$  og  $g(x)$  og dernæst et søgepunkt  $P$  tæt på skæringspunktet. Skæringspunktet dukker da op på skærmen sammen med den fælles  $x$ -koordinat og de tilhørende funktionsværdier (som numerisk kontrol på at ligningen er løst korrekt).

**1 trin:** Klik på forskrifterne for  $f(x)$  og  $g(x)$ :



**2 trin:** Udpeg skæringspunktet:



### 3. Toppunkt: Toppunkt $f'(x_0)=0$ : Vælg $f(x)$ - PktP

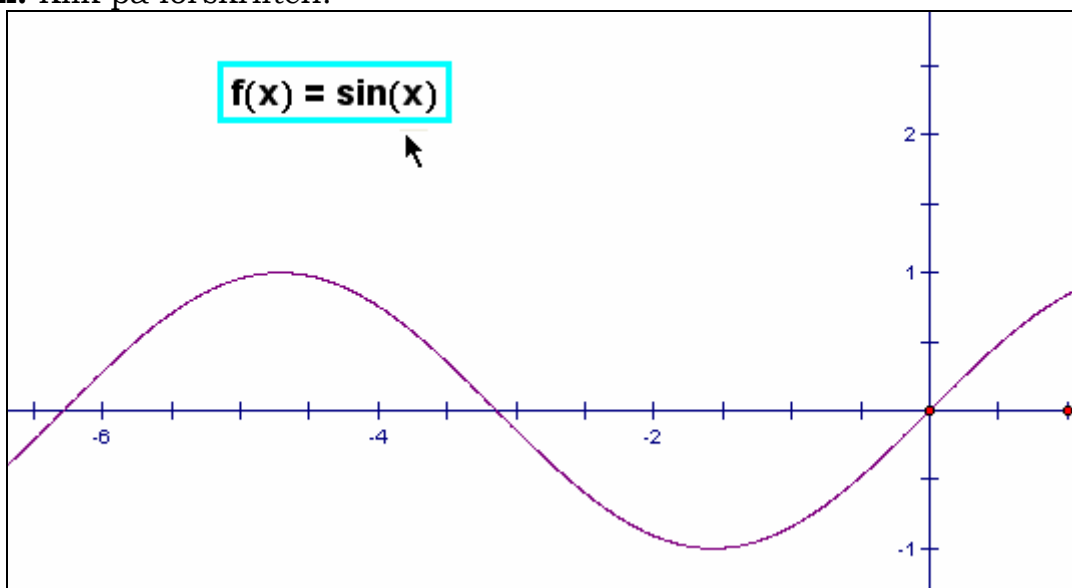
For at finde toppunkter benyttes Newtons metode med 10 iterationer til at løse ligningen for stationære punkter  $f'(x) = 0$ , dvs. standarditerationen

$$x \rightarrow x - \frac{f'(x)}{f''(x)}$$

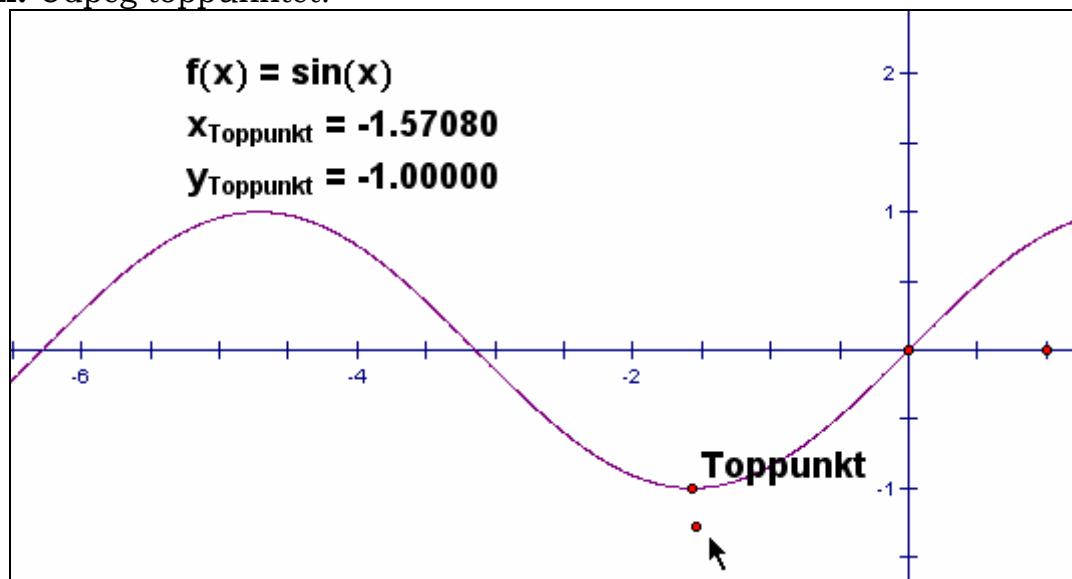
Den kræver, at man vælger en startværdi tæt ved det søgte toppunkt.

Når man vælger **Toppunkts**-værktøjet skal man derfor først udpege forskriften for graffunktionen  $f(x)$  og dernæst et søgepunkt  $P$  tæt på toppunktet. Toppunktet dukker da op på skærmen sammen med  $x$ - og  $y$ -koordinaten.

**1 trin:** Klik på forskriften:



**2 trin:** Udpeg toppunktet:



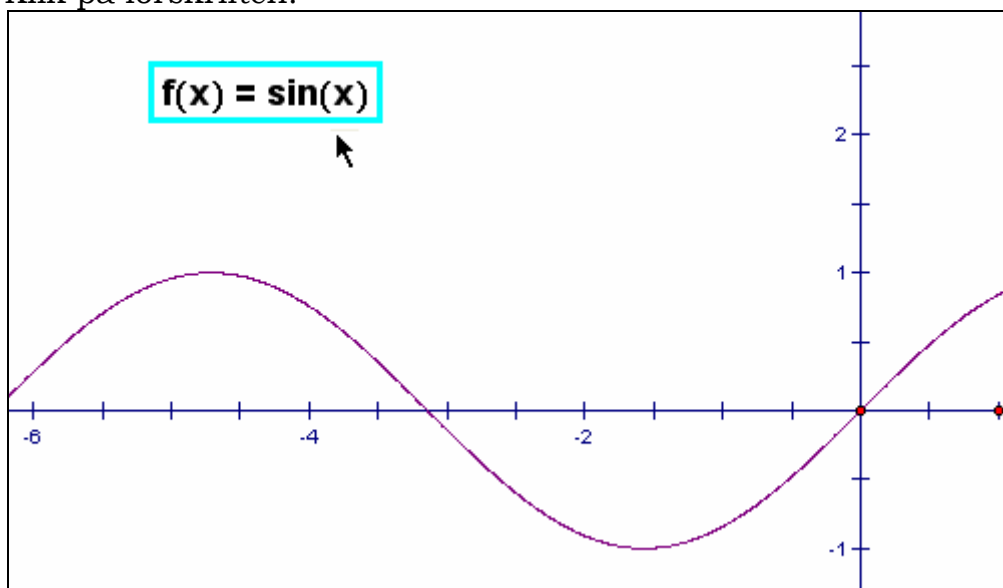
#### 4. Tangent: Tangent: Vælg f(x) - PktP

For at finde tangenter udnyttes det at tangenten har hældningen  $f'(x_0)$  og derfor går gennem røringspunktet  $(x_0, f(x_0))$  såvel som det forskudte punkt:

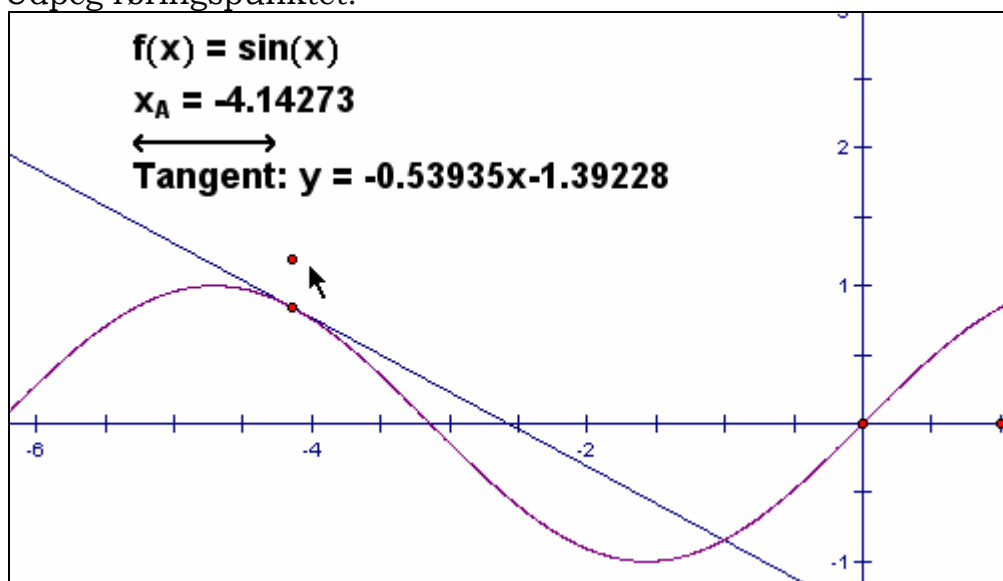
$$(x_0 + 1, f(x_0) + f'(x_0))$$

Når man vælger **Tangent**-værktøjet skal man derfor først udpege forskriften for graffunktionen  $f(x)$  og dernæst tangentens røringspunkt. Tangenten dukker da op på skærmen sammen med  $x$ -koordinaten for røringspunktet samt ligningen for tangenten.

**1 trin:** Klik på forskriften:



**2 trin:** Udpeg røringspunktet:



*Bemærkning:* Man kan naturligvis godt klikke direkte på et grafpunkt – også gerne et grafpunkt, der på forhånd er afsat på grafen, fx for at finde ligningen for tangenten i et på forhånd defineret grafpunkt.

**5. Vendetangent:** Vendetangent  $f''(x_0)=0$ : Vælg  $f(x)$  - pktP

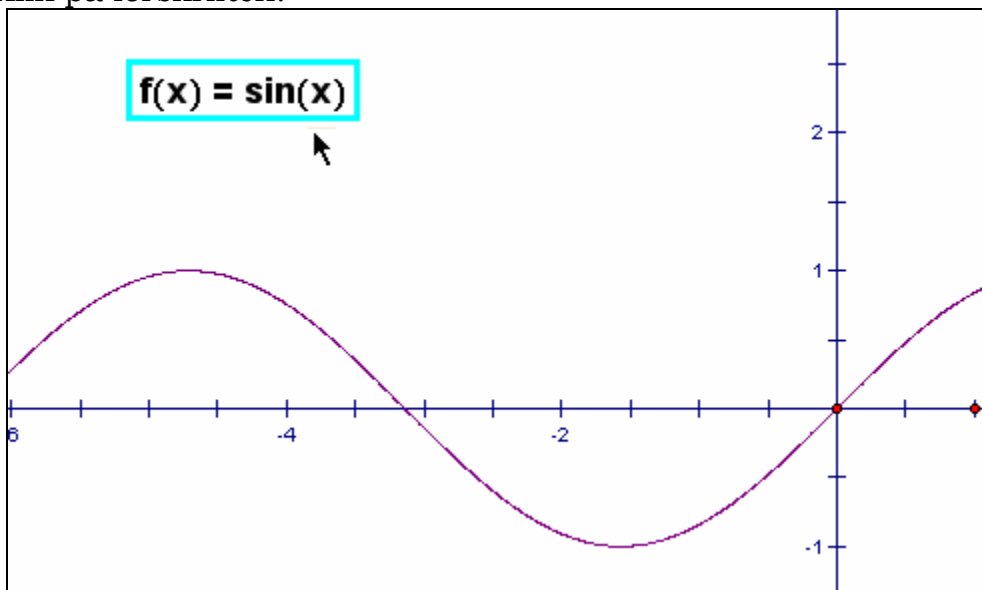
For at finde vendetangenter benyttes Newtons metode med 10 iterationer til at løse ligningen  $f''(x) = 0$ , dvs. standarditerationen

$$x \rightarrow x - \frac{f''(x)}{f'''(x)}$$

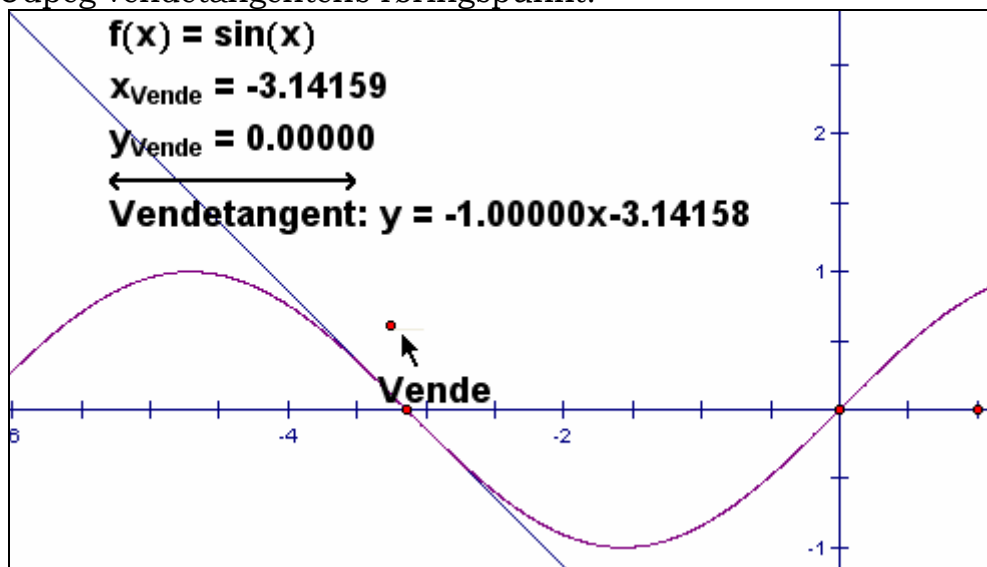
Den kræver, at man vælger en startværdi tæt ved den søgte vendetangent.

Når man vælger **Vendetangent**-værktøjet skal man derfor først udpege forskriften for graffunktionen  $f(x)$  og dernæst et søgepunkt  $P$  tæt ved vendetangentens røringspunkt. Vendetangenten med tilhørende røringspunkt dukker da op på skærmen sammen med  $x$ - og  $y$ -koordinaten for røringspunktet samt ligningen for vendetangenten.

**1 trin:** Klik på forskriften:



**2 trin:** Udpeg vendetangentens røringspunkt:



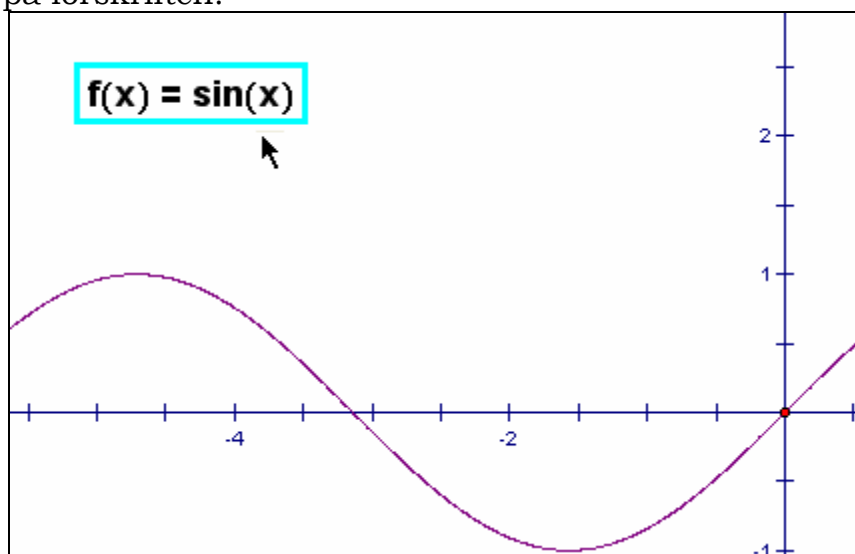
**6. Normal:** Normal: Vælg f(x) - pktP

For at finde normaler udnyttes det at normalen har hældningen  $-1/f'(x_0)$  og derfor går gennem røringspunktet  $(x_0, f(x_0))$  såvel som det forskudte punkt:

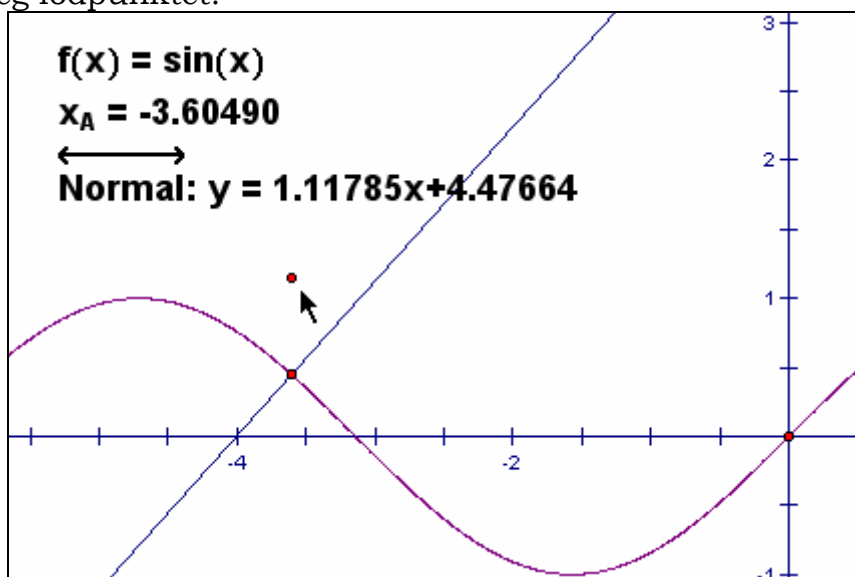
$$\left(x_0 + 1, f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\right)$$

Når man vælger **Normal**-værktøjet skal man derfor først udpege forskriften for graffunktionen  $f(x)$  og dernæst normalens fodpunkt. Normalen dukker da op på skærmen sammen med  $x$ -koordinaten for fodpunktet samt ligningen for normalen.

**1 trin:** Klik på forskriften:



**2 trin:** Udpeg fodpunktet:



*Bemærkning:* Man kan naturligvis godt klikke direkte på et grafpunkt – også gerne et grafpunkt, der på forhånd er afsat på grafen, fx for at finde ligningen for normalen i et på forhånd defineret grafpunkt.

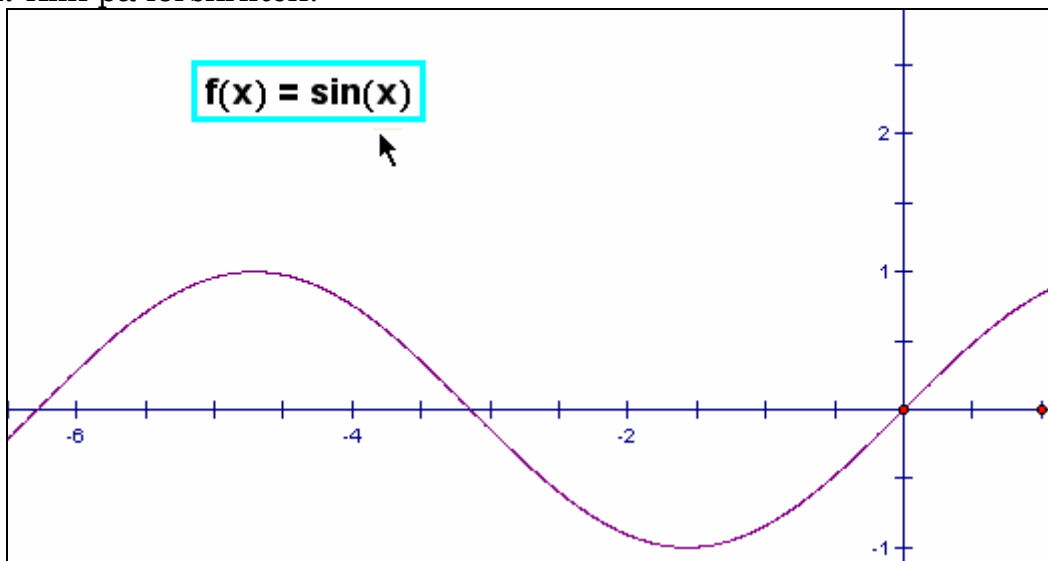
**7. Krumning:** Krumning: Vælg f(x) - pktP

For at finde krumningscentret udnyttes det at krumningscentret har koordinaterne:

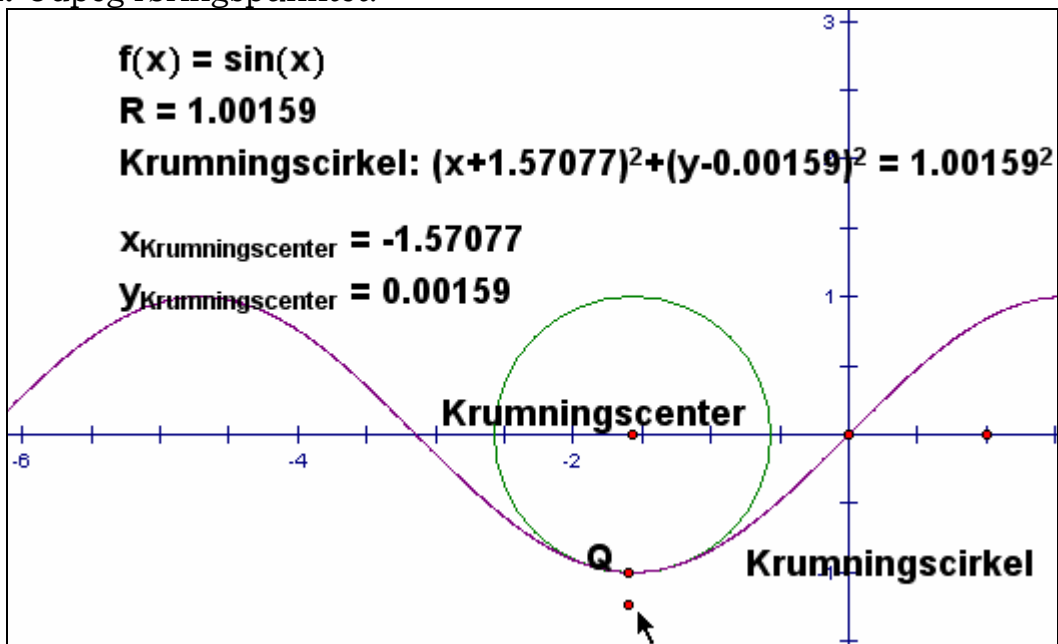
$$\left( x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} \cdot (1 + f'(x_0)^2), f(x_0) + \frac{1}{f''(x_0)} \cdot (1 + f'(x_0)^2) \right)$$

Når man vælger **Krumnings**-værktøjet skal man derfor først udpege forskriften for graf funktionen  $f(x)$  og dernæst krumningscirkelens røringsspunkt. Krumningscirklen med tilhørende røringsspunkt og centrum dukker da op på skærmen sammen med  $x$ -, og  $y$ -koordinaterne for krumningscentret samt krumningsradius og ligningen for krumningscirklen.

**1 trin:** Klik på forskriften:



**2 trin:** Udpeg røringsspunktet:



*Bemærkning:* Man kan naturligvis godt klikke direkte på et grafpunkt – også gerne et grafpunkt, der på forhånd er afsat på grafen, fx for at finde ligningen for krumningscirklen i et på forhånd defineret grafpunkt.

## Integralrutinerne: generelle bemærkninger

For at udregne et integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

benyttes en standard Gauss 3-punktsmetode som er lige så simpel at implementere, men mere nøjagtig, end Simpsonsummen. Den bygger på tilnærmelsessummen:

$$\frac{h}{18} \cdot \left( 5 \cdot f \left( a + \frac{h}{2} \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right) + 8 \cdot f \left( a + \frac{h}{2} \right) + 5 \cdot f \left( a + \frac{h}{2} \cdot \left( 1 + \sqrt{\frac{3}{5}} \right) \right) \right)$$

hvor  $h$  er længden af intervallet, dvs.  $h = b - a$ .

Afhængig af hvor pæn funktionen er, kan man nu opnå en god værdi for et rimeligt antal intervalinddelinger. For pæne funktioner, der ikke varierer voldsomt henover integrationsintervallet vil summen typisk stabiliseres allerede ved en 3-4 intervalinddelinger, så her er ti intervalinddelinger rigeligt. Men for hurtigt varierende eller hurtigt svingende funktioner kan det være nødvendigt at gå op til fx 100 intervalinddelinger før summen stabiliseres.

Af disse og andre tekniske grunde er antallet af intervalinddelingerne en del af integralrutinerne, dvs. før man får lov til at integrere **skal** man have oprette en parameter  $N$  (eller en beregning/måling), der angiver det antal intervalinddelinger, som man vil benytte i tilnærmelsessummen.

Det har såvel ulemper og fordele i praksis. Blandt fordelene er følgende:

1. Brugeren mindes om at der netop er tale om en tilnærmelsessum og ikke en eller anden form for eksakt symbolsk rutine.
2. Brugen kan selv sikre at udregningen er præcis ved at prøve at skrue op for antallet af intervalinddelinger. Hvis integralværdien ændres er antallet ikke højt nok, og man kan nu skrue op indtil integralværdien er stabiliseret – og summen altså har antaget sin grænseværdi. Den modne bruger kan altså selv tage ansvaret for integrationens nøjagtighed. Den svage bruger kan bare sætte et højt tal, fx 100, og håbe på at alt går godt.
3. Hvis integralet skal bruges i videre konstruktioner af fx geometriske steder er det vigtigt at kunne holde antallet af intervalinddelinger lavt for at holde den samlede beregningstid nede (Det samme gælder naturligvis antallet af punkter i det geometriske sted). Her er det en klar fordel at man selv kan sætte antallet af intervalinddelinger passende lavt, og stadigvæk kunne kontrollere at det geometriske sted ikke ændrer sig visuelt.

*Konklusion:*

**For at få lov til at integrere skal man altid huske først at indføre en parameter  $N$ , der angiver antallet af intervalinddelinger!**

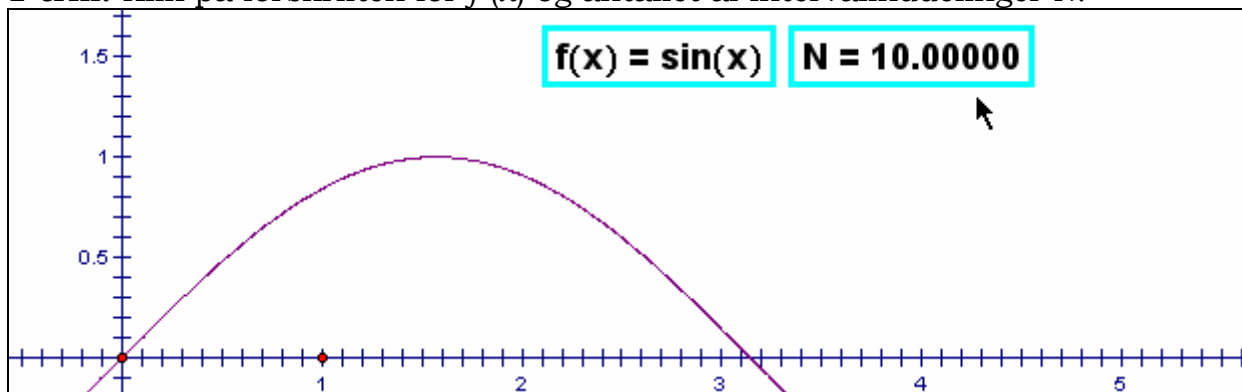
## 8. Integral med en funktion: Integral med en fkt: Vælg f(x) - N - pktA - pktB

For eksempelvis at finde arealet af en grundfigur afgrænset af  $x$ -aksen, to lodrette linjer  $x = a$  og  $x = b$ , samt grafen for en positiv funktion  $f$ , skal man udregne integralet:

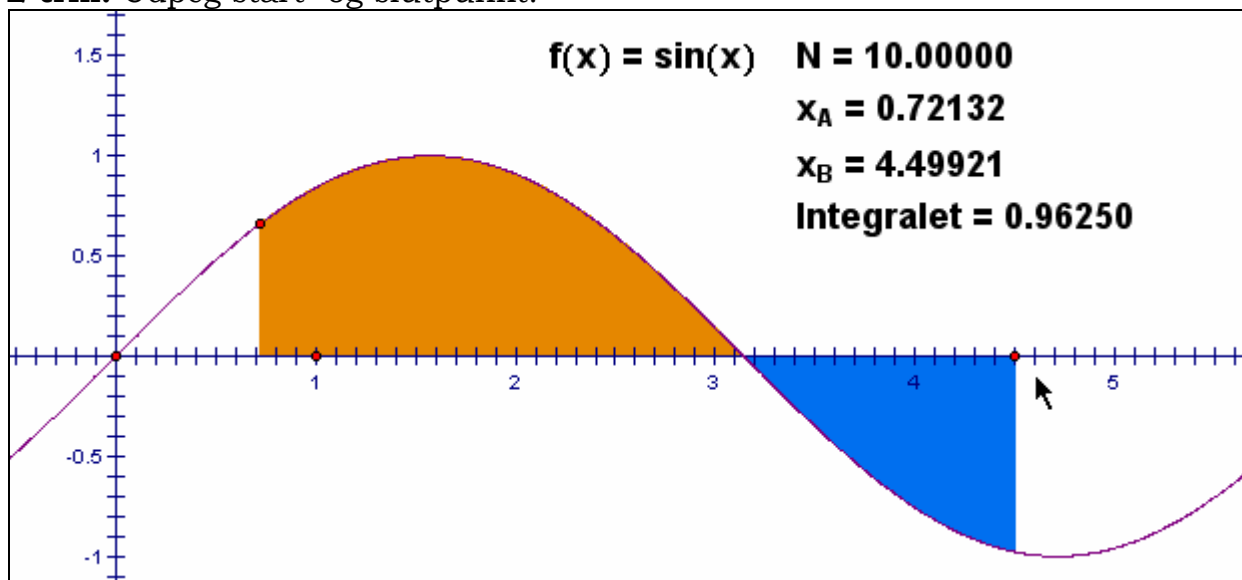
$$\int_a^b f(x)dx$$

Når man vælger **Integral**-værktøjet skal man derfor først udpege funktionens forskrift  $f(x)$  og antallet af intervalinddelinger  $N$ . Dernæst udpeger man startpunkt  $A$  og slutpunkt  $B$  for området. Figuren hørende til integralet skraveres med jordfarven brun for den del af figuren, der ligger over  $x$ -aksen (og derfor bidrager positivt til integralet) og vandfarven blå for den del af figuren, der ligger under  $x$ -aksen (og derfor bidrager negativt til integralet). Grænserne samt værdien af integralet oplyses. Man skal selvfølgelig også huske på at startpunktet skal ligge til venstre for slutpunktet – ellers skifter integralet fortegn!

**1 trin:** Klik på forskriften for  $f(x)$  og antallet af intervalinddelinger  $N$ :



**2 trin:** Udpeg start- og slutpunkt:



*Bemærkning:* Forskellen på arealet af det venstre brune område og det højre blå område er altså netop 0.96250.

## 9. Integral mellem to funktioner: Integral mellem to fkt: Vælg f(x) - g(x) - N - pktA - pkt B

For eksempelvis at finde arealet af en figur afgrænset af to lodrette linjer  $x = a$  og  $x = b$ , samt graferne for to funktioner  $f$  og  $g$ , (med grafen for  $f$  øverst og grafen for  $g$  nederst) skal man udregne integralet:

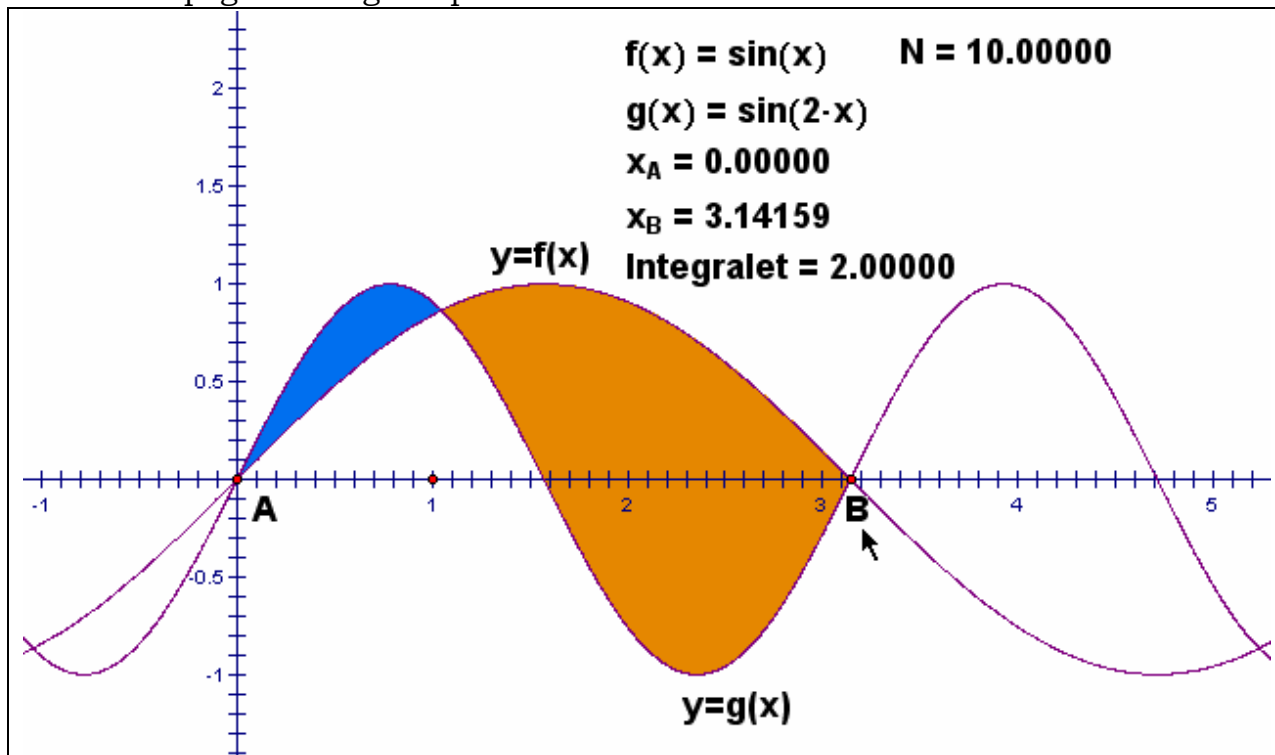
$$\int_a^b f(x) - g(x) dx$$

Når man vælger **Integral mellem to funktioner**-værktøjet skal man derfor først udpege funktionernes forskrift  $f(x)$  og  $g(x)$  samt antallet af intervalinddelinger  $N$ . Dernæst udpeger man startpunkt  $A$  og slutpunkt  $B$  for området. Figuren hørende til integralet skraveres med jordfarven brun for den del af figuren, hvor den første funktion  $f$  ligger øverst (og denne del derfor bidrager positivt til integralet) og vandfarven blå for den del af figuren, hvor den første funktion  $f$  ligger nederst (og denne del derfor bidrager negativt til integralet). Grænserne samt værdien af integralet oplyses. Man skal selvfølgelig også huske på at startpunktet skal ligge til venstre for slutpunktet – ellers skifter integralet fortegn!

**1 trin:** Klik på forskrifterne for  $f(x)$  og  $g(x)$  og antallet af intervalinddelinger  $N$ :

<b>f(x) = sin(x)</b>	<b>N = 10.00000</b>
<b>g(x) = sin(2·x)</b>	↖

**2 trin:** Udpeg start- og slutpunkt:



*Bemærkning:* Forskellen mellem arealet af det store brune område og arealet af det lille blå område er altså netop 2.

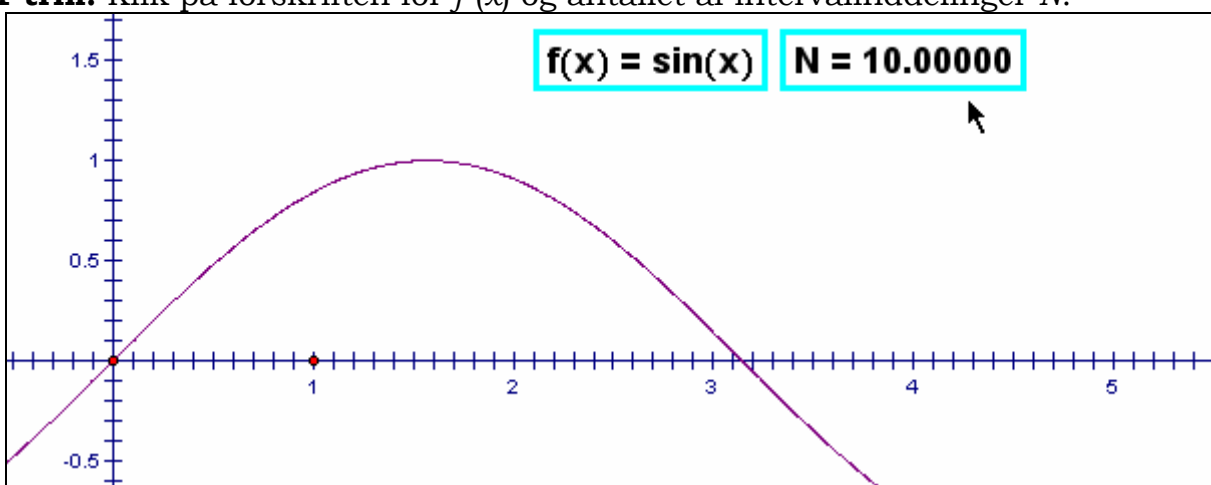
**10. Buelængde:** Buelængde: Vælg f(x) - N - pktA - pktB

For at finde buelængden for et udsnit af grafen for en differentiabel funktion  $f$ , hvor udsnittet går fra  $x = a$  til  $x = b$ , skal man udregne integralet:

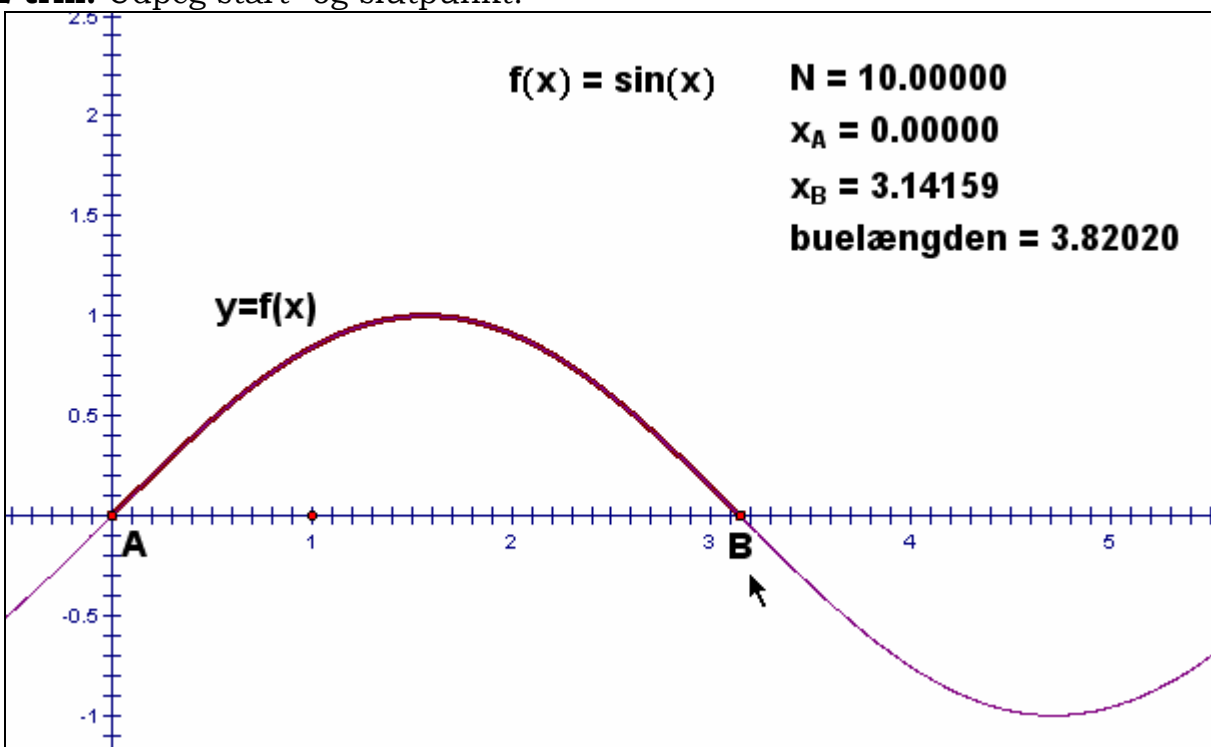
$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Når man vælger **Buelængde**-værktøjet skal man derfor først udpege funktionens forskrift  $f(x)$  og antallet af intervalinddelinger  $N$ . Dernæst udpeger man startpunkt  $A$  og slutpunkt  $B$  for udsnittet af grafen. Udsnittet hørende til integralet fremhæves med jordfarven brun. Grænserne samt værdien af buelængden oplyses. Man skal selvfølgelig selv huske på at startpunktet skal ligge til venstre for slutpunktet – ellers skifter integralet fortegn!

**1 trin:** Klik på forskriften for  $f(x)$  og antallet af intervalinddelinger  $N$ :



**2 trin:** Udpeg start- og slutpunkt:



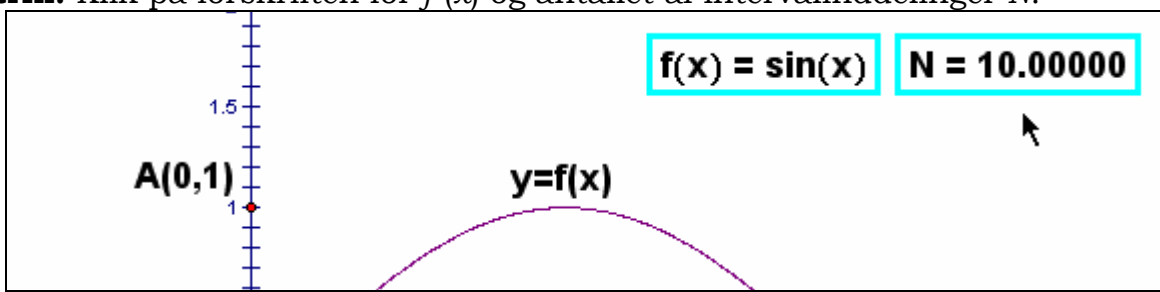
**12. Stamfunktion:** Stamfunktion: Vælg f(x) - N - x0 - slutPkt

For at tegne grafen for en stamfunktion  $F(x)$  til en given funktion  $f(x)$  som et geometrisk sted, skal man kunne håndtere stamfunktionsintegralet:

$$F(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t) dt .$$

Når man vælger **Stamfunktion**-værktøjet skal man derfor først udpege funktionens forskrift  $f(x)$  og antallet af intervalinddelinger  $N$ . Dernæst udpeger man startpunktet  $(x_0, y_0)$  for stamfunktionen graf samt et slutpunkt for det område, hvor stamfunktionens graf skal tegnes. Grafen for stamfunktionen tegnes som et geometrisk sted sammen med det interval på  $x$ -aksen, der afgrænses af de to punkter. Hvis man vil have tegnet den del af grafen for stamfunktionen, der ligger forud for startpunktet, skal man blot vælge sit slutpunkt før startpunktet ☺.

**1 trin:** Klik på forskriften for  $f(x)$  og antallet af intervalinddelinger  $N$ :



**2 trin:** Udpeg start- og slutpunkt:

